1960 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. XII, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Об операционном исчислении

И. З. Штокало

Символическое, или, как еще называют, операционное исчисление. благодаря трудам ряда видных математиков, физиков и механиков, а также инженерных работников в различных областях техники, стало эффективным средством математического исследования многих прикладных вопросов, особенно тех, которые связаны с линейными дифференциальными уравнениями.

Его методы нашли успешное применение в решении ряда математических проблем, например в области решения линейных дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и в частных производных, в области теории чисел и др.

Известны приложения операционного исчисления в теории систем автоматического регулирования, к решению ряда задач электротехники, в частности задач механического расчета электрических проводов, к исследованию некоторых вопросов радиотехники, теплопроводности и механики, к разработке актуальных задач горной механики, например задач, относящихся к теории колебания шахтных подъемных канатов, и др. Этим и многим другим вопросам посвящены соответствующие работы наших отечественных и зарубежных авторов, получивших важные результаты, вошедшие в теорию и практику ряда областей математики, физики, механики и техники. По мнению академика А. А. Андронова, операционное исчисление является азбукой современной автоматики и телемеханики. О значении операционного исчисления можно также прочесть в статье Е. Т. Уиттекера, помещенной в журнале «Bull. Calcutta Math. Soc.» (T. 20. 1928). В этой статье он писал: «...Мы должны считать операционное исчисление, наряду с открытием Пуанкаре автоморфных функций и открытием Риччи тензорного исчисления тремя наиболее важными успехами математики за последнюю четверть девятнадцатого века. Их применение, дальнейшая разработка и обоснование составляют значительную часть деятельности математиков наших дней».

Методы символического исчисления позволяют рассматривать символ $\frac{d}{dt} = p$ как величину, над которой можно производить некоторую систему формальных операций, на основе которых строится соответствующий анализ. В этой системе операций дифференцирование функции $f(t)$ рассматривается как умножение этой функции на p, интегрирование ее — как деление на p и т. д. В результате такого рассмотрения решение некоторых, главным образом, линейных дифференциальных уравнений сводится к решению алгебраических уравнений.

Решая уравнение, которое содержит производные и интегралы от неизвестной функции $f(t)$ действительного переменного t, определенной при положительных значениях аргумента и называемой в операционном исчислении «начальной функцией», или «оригиналом», мы, применяя известные правила операционного исчисления, переходим от этой функции к новой неизвестной функции $F(p)$, зависящей от комплексного переменного p, называемой в операционном исчислении «преобразованной функцией», или «изображением». Дальше совершаем над преобразованной функцией $F(p)$ операции, соответствующие операциям над $f(t)$, имеющейся в заданном уравнении. Эти операции над $F(p)$, вследствие свойств операционного исчисления, являются более простыми, чем заданные операции над $f(t)$. В результате получаем вместо первоначального уравнения относительно $f(t)$ «преобразованное» или «операторное», где уже неизвестной функцией является $F(p)$. Решив это уравнение относительно последней затем, по определенным правилам операционного исчисления, переходим от функции $F(p)$ к искомой функции $f(t)$. Таков путь применения операционных методов.

В литературе, посвященной операционному исчислению и его приложениям, создание его обычно приписывается английско у инженеру-электрику Оливеру Хевисайду (1850—1925), впрочем, не получившему систематического образования. Как известно, Хевисайд опубликовал в 1893. 1899 и 1912 годах свои исследования, в которых был применен символический метод к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и некоторых типов дифференциальных уравнений в частных производных.

Изучив классические работы Максвелла и Томсона, он исследовал вопросы, связанные со сложными проблемами электротехники, в частности с проблемами распространения электромагнитных колебаний вдоль проводов, рассматривал Максвелловы уравнения электромагнитного поля, ввел понятие «слоя», получившее большое значение в современной радиотехнике, положил начало в создании теории движения электрона в магнитном поле, пользовался понятием об отрицательном сопротивлении и т. д.

В связи с важностью вопросов, в решении которых нашел применение символический метод в работах Хевисайда, этот метод обычно и связывается в соответствующей литературе с его именем, однако первоначальная разработка символического метода должна быть отнесена к другим авторам, занимавшимся этим вопросом задолго до появления работ Хевисайда.

Так, например, в Киеве М. Е. Ващенко-Захарченко более чем на 30 лет ранее Хевисайда, а именно в 1862 году, опубликовал труд под заглавием «Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений» (напечатано в Киевском университете), в котором были поставлены и решены основные вопросы символического метода. В этой книге в начале ее изложения рассматривается вопрос о символах и их свойствах, затем решаются линейные дифференциальные уравнения с постоянными и переменными коэффициентами — обыкновенные и в частных производных,—выведена формула, выражающая, согласно современной терминологии операционного исчисления, оригинал в виде суммы, взятой по корням знаменателя изображения, причем рассмотрен также случай кратных корней, чего не сделал в своей работе Хевисайд. К тому же следует заметить, что Хевисайд в своем мемуаре поместил указанную формулу без вывода, а Ващенко-Захарченко дал полное ее доказательство. Кроме того, в книге Ващенко-Захарченко рассмотрено применение символического метода при интегрировании линейных дифференциальных уравнений с помощью бесконечных рядов.

Таким образом, Ващенко-Захарченко в разработке основных вопросов символического метода намного опередил Хевисайда, и его имя должно стоять в числе первых авторов этого метода, причем он является зачинателем разработки символического исчисления в России.

Известно также, что в 1868 году в Москве была издана книга А. В. Летникова «Теория дифференцирования с произвольным указателем», в которой были рассмотрены вопросы, по существу близкие к предмету символического исчисления. Эта книга всего лишь на шесть лет вышла позже книги Ващенко-Захарченко.

В трудах советских ученых операционное исчисление нашло свое дальнейшее развитие как в области разработки теории, так и в области разнообразных приложений в вопросах математики, физики, механики, техники и др. Достаточно указать исследования в области развития теории и применения операционного метода в соответствующих работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (обоснование символического метода для дифференциальных уравнений в частных производных и обобщение и применение операционного исчисления в нелинейных задачах математической физики), М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата (теория и различные применения операционного метода), Б. В. Булгакова и А. И. Лурье (применение операционного исчисления к задачам механики), А. И. Плеснера и В. А. Диткина (обоснование операционного исчисления с точки зрения функционального анализа), В. А. Диткина (решение задач теплопроводности методом операционного исчисления), И. З. Штокало (обобщение символического метода на линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами), М. И. Конторовича (применение операционных методов к рассмотрению нестационарных явлений в электрических цепях), А. Я. Повзнера (применение операционного метода к решению задач математической физики), А. И. Маркушевича (очерк развития операционного исчисления), С. И. Евтянова, А. В. Лыкова (приложения операционного исчисления в радиотехнике), М. Ю. Юрьева, К. А. Круга и Э. А. Мееровича (приложения операционного метода к решению задач в области электротехники), В. В. Солодовникова (применение операционного исчисления к задачам динамики систем автоматического регулирования), О. М. Крыжановского (приложение символических методов к анализу работы автоматического регулятора шахтной подъемной машины), О. А. Залесова (применение символического исчисления к построению теории работы шахтной опрокидной клети), А. М. Эфроса и А. М. Данилевского (применение контурных интегралов в операционном исчислении), В. К. Иванова (обобщенное преобразование Фурье в операционном исчислении) и многих других.

Из первых зарубежных авторов символического метода следует упомянуть Лобатто, который в 1837 г. опубликовал труд «Théorie des Caractéristiques», где было изложено символическое интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Годом позже Грегори поместил в первом и втором томах журнала «Cambridge Mathematical journal» свой мемуар, где дал основы теории символического исчисления и применил последнее к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Впоследствии этот же автор опубликовал в 1864 году работу «Examples the differential and integral Calculus», в которой был изложен материал, сообщенный им ранее и, кроме того, был применен символический метод к решению линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными и переменными коэффициентами.

Известно также, что Буль в 1844 г. в своем мемуаре «On a General Method in Analysis», помещенном в издании «Philosophical Trans.», по сути положил начало трансцендентной части символического исчисления с применением к решению линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

В 1855 году Кармайкел опубликовал труд «A Treatise on the Calculus of Operations», в котором были использованы теоремы Челлета, относящиеся к символическому исчислению, и изложена теория символического метода.

В том или другом виде и объеме введением операционного исчисления в различные исследования занимались: Лейбниц, Лагранж, Коши, Лаплас, Риман, Стокс, Уиттекер, Буш, Челлет, Девис, Дебай, Зоммерфельд и др.

Что касается Хевисайда, то он, как можно заключить из его высказываний, не особенно заботился об обосновании применяемых им методов, что, впрочем, привсдило его в ряде случаев к неверным результатам. Известно, что в ответ на замечания некоторых лиц по поводу необходимости обоснования нового метода, он обычно ограничивался уклончивым и, надо сказать, не совсем удачным сравнением. Такое отношение Хевисайда к вопросам обоснования символического метода явилось поводом для необоснованного предположения со стороны кое-каких исследователей, что, якобы, Хевисайд не стремился обнародовать полностью свои идеи и результаты, предпочитая многое из известного ему держать при себе и не доводить до сведения других авторов путем публикации всех своих исследований.

Строгое обоснование операционного исчисления было осуществлено другими авторами и среди них английским математиком Б. Бромвичем (1875—1930) и американским инженером Д. Карсоном. Последний в 1926 г. показал связь между этим исчислением и интегральным преобразованием Лапласа. В своей работе «Electric Circuit Theory and Operational» он установил соотношение между начальной функцией и ее изображением в виде интегрального уравнения первого рода относительно начальной функции, в котором используется интеграл Лапласа. В операционном исчислении это уравнение именуется уравнением Карсона. Обратную зависимость между начальной функцией и ее изображением установил Бромвич, имя которого она и носит в операционном исчислении. Следует заметить, что Бромвич пришел к этому соотношению раньше, чем Карсон к своему. Работа Бромвича была напечатана в 1916 г. в издании «Proc. Lond. Math. Soc.». Впоследствии его результаты были развиты в исследованиях Джефриза, в частности в работе «Operational Methods in Mathematical Physics» (Cambridge, 1927).

Метод Бромвича дает решение заданного дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным и краевым условиям, в виде интеграла в комплексной области, который берется вдоль некоторого, соответствующим образом выбранного, пути. Следует заметить, что интеграл, используемый Бромвичем, был известен задолго до него Риману в его работе 1859 года «О числе простых чисел, не превышающих данной величины». Этот интеграл, как известно, обычно именуется интегралом Римана—Меллина.

Метод Карсона, в котором используется одностороннее преобразование Лапласа, имеющее нижним пределом интегрирования нуль, а также двухстороннее преобразование Лапласа, где нижним пределом интегрирования есть — ∞, рассматривает трансформацию Лапласа начальной функции, которая в данном случае принимается неизвестной.

Двустороннее преобразование Лапласа использовано в книге Б. Ван дер Поля и X. Бреммера «Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа» (1952 г.). В этой книге говорится, что подобное построение операционного исчисления расширяет его основания и при таком изложении материала упрощаются операционные правила, а также становится доступным для изучения значительно более широкий класс функций.

Однако нужно было, чтобы два метода, исходившие в построении операционного исчисления — один от преобразования Лапласа, а другой от трансформации Римана—Меллина, — были соединены в одну общую теорию. Это и было сделано П. Леви в его работе «Le calcul symbolique d'Heaviside» (1926), в которой он показал, что решение интегрального уравнения первого рода относительно начальной функции, используемое Карсоном, представляется формулой Бромвича и наоборот. С тех пор два способа применения операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений — способ Карсона и способ Бромвича — получили теоретическую основу для объединения их в одну стройную теорию, в один общий метод.

Таким образом, в связи с результатами Бромвича, Карсона, Леви, дальнейшее развитие операционного исчисления шло по пути, где применение контурных интегралов оказалось весьма полезным, вследствие чего вошло в употребление обозначение буквой p не только оператора $\frac{d}{dt}$, но и комплексной величины, служащей аргументом изображения, то есть преобразованной функции. Этот новый путь значительно расширил понимание операционного исчисления и внес четкость во многие вопросы, остававшиеся до того времени не вполне ясными.

Что касается значения применения контурных интегралов в операционном исчислении, то в этом отношении большой материал находим в книге А. М. Эфроса и А. М. Данилевского «Операционное исчисление и контурные интегралы» (1937), где в достаточной степени изложены теория и применение в операционном исчислении контурных интегралов от функций комплексного переменного, а также в известной мере выяснена роль операционного исчисления в решении различных задач математики, физики и техники, в частности задач, связанных со специальными функциями. Вместе с тем в этой книге дано систематическое изложение и выводы формул операционного исчисления.

В изложении операционного исчисления должна быть надлежащим образом уяснена роль p, как обозначения оператора $\frac{d}{dt}$, а также как комплексной величины, служащей аргументом преобразованной функции. В некоторых руководствах по операционному исчислению этому вопросу отводится определенное место. Так, например, в предисловии к книжке А. И. Лурье «Операционное исчисление» (1950 г.), среди других положений, говорится: «Во всем изложении строго проводится точка зрения на операционное исчисление, как на средство обращения операции анализа в области начальных функций в алгебраические операции в области изображения этих функций. Слово «оператор» в тексте книги употребляется в осторожной форме, автор стремился всеми средствами привить читателю взгляд, что p — это такое же число, как и всякое другое; последовательное проведение этой точки зрения представляется весьма важным, так как во многих работах она часто не подчеркивается с достаточной определенностью, от чего происходят многие недоразумения, а иногда и прямые ошибки».

На протяжении последних двадцати лет обоснование операционного метода пошло по пути, прокладываемому с помощью общей теории операторов функционального анализа. Это по сути третий путь развития операционного исчисления, обобщающий и дальше продвигающий основы этой области математики.

В обобщающем обосновании операционного исчисления основополагающую роль сыграли советские математики, благодаря работам которых операционное исчисление стало составной частью теории операторов функционального анализа. В этом отношении выделяются исследования А. И. Плеснера, помещенные в его работе «О включении исчисления Хевисайда в спектральную теорию максимальных операторов» (1940). В этом изложении существенное значение отводится метрике пространства Гильберта. Остановимся вкратце на вопросах, связанных с образованием этого нового пути.

Метод, обобщающий основы операционного исчисления, основан на принципе соответствия между некоторыми двумя множествами $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{P}$. Второе из них является множеством функций комплексного переменного p, а первое представляет собою множество соответствующих операторов. Этот принцип соответствия состоит в том, что каждой функции $f(p)$ множества $\mathfrak{P}$ соответствует определенный оператор $f(D)$ из множества $\mathfrak{D}$, причем единичной функции $f(p) = 1$ отвечает единичный оператор $f(D) = E$, а в случае $f(p) = p$ соответствующий оператор $f(D)$ совпадает с оператором D. Кроме того, сумме функций $f_1(p) + f_2(p)$ и произведению функций $f_1(p) \cdot f_2(p)$ отвечает соответственно сумма операторов $f_1(D) + f_2(D)$ и произведение операторов $f_1(D) \cdot f_2(D)$.

Таким образом, имеется наличие изоморфизма между некоторым классом операторов и некоторым классом функций, при котором действия, совершаемые над функциями $f(p)$ множества $\mathfrak{P}$ без выведения результатов за пределы этого множества, переходят в действия над функциями $f(D)$ множества $\mathfrak{P}$. К такому соответствию между множеством функций комплексного переменного и множеством операторов приводит трансформация Лапласа—Карсона, что позволяет надлежащим образом обосновать построение операционного исчисления. Исходя из этого, можно притти к весьма важным приемам в пользовании операционным методом.

Если, например, имеем уравнение:

$$a_0(x,p) \frac{d^n y(x,p)}{dx^n} + a_1(x,p) \frac{d^{n-1} y(x,p)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x,p) \frac{dy(x,p)}{dx} +$$
$$+ a_n(x,p)\, y(x,p) = \varphi(x,p),$$

в котором содержится неизвестная функция от x и комплексного параметра p и коэффициенты зависят также от этих переменных, и уравнение:

$$a_0(x,D) \frac{d^n y(x,D)}{dx^n} + a_1(x,D) \frac{d^{n-1} y(x,D)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x,D) \frac{dy(x,D)}{dx} +$$
$$+ a_n(x,D)\, y(x,D) = \varphi(x,D),$$

где содержится неизвестная функция от x и оператора D и коэффициенты суть также функции от них, то мы, с пониманием существа вопроса, можем не делать особого различия между этими уравнениями.

Обоснование операционного исчисления, исходя из общих принципов теории операторов функционального анализа дает математически строгое построение изложения всего материала этого исчисления.

Этому новому пути, связанному с общей теорией операторов функционального анализа, следует в обосновании и построении операционного исчисления В. А. Диткин в своей работе монографического характера «Операционное исчисление» (Успехи математических наук, т. II., вып. 6 (22), 1947 г.), где стройно и строго проведено все изложение операционного исчисления.

В нашей советской литературе имеется ряд больших работ по операционному исчислению, где его теория и различные приложения получили свое дальнейшее развитие. Об этом можно судить, хотя бы по одному перечню направлений исследований, который помещен на стр. 85 данной статьи и который можно было бы значительно продолжить. Среди других отметим здесь соответствующие труды Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, в которых строго математически обоснован символический метод для дифференциальных уравнений в частных производных, обобщено и применено символическое исчисление к решению нелинейных задач математической физики, а также изложены символические методы в нелинейной механике в применении к исследованию резонанса в электронном генераторе.

Операционное исчисление включается также в новые курсы по теории функций комплексного переменного. Так, например, в книге М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата «Методы теории функций комплексного переменного (1951 г.) в главе VI излагается операционный метод и его приложения. В этой книге построение изображения осуществляется по Лапласу, что отличается от построения изображения по Хевисайду отсутствием множителя p. Такое построение изображения дает возможность использовать в изложении материала то обстоятельство, что преобразование Лапласа более естественно связывается с интегралом Фурье, а это дает удобство во многих задачах математической физики. Кроме того, можно указать еще и на то, что преобразование Лапласа обладает нужными симметрическими свойствами.

Изложенный в статье материал не претендует на полноту освещения развития операционного исчисления. Здесь даны только основные этапы развития. Однако и этого достаточно, чтобы уяснить ту большую роль, которую сыграли в создании теоретических основ и в применении их к решению важных задач наши отечественные ученые.

Поступила
17.XI 1959 г.
Киев

On the Calculus of Operations

I. Z. Shtokalo

Summary

This paper contains a brief outline of investigations in the field of the calculus of operations, indicating the main trends and principal stages of development, as well as a substantiation of the methods of the calculus of operations. The author elucidates the role of native scientists and their contributions in this field of mathematics, which are of great importance both for the development of mathematical theory and for application to urgent problems.