К обратной задаче для уравнений квантовой механики

В. И. Мальченко

Рассеяние нерелятивистских квантово-механических частиц не зависящим от времени внешним скалярным полем $V(\vec{x})$ описывается уравнением Шредингера

$$(\Delta + k^2)\,\psi(\vec{x}) = \lambda V(\vec{x})\,\psi(\vec{x}). \tag{1}$$

В дальнейшем предполагается, что имеет место упругое рассеяние. В таком случае требуется найти решение уравнения (1), имеющее вид

$$\psi(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + v, \tag{2}$$

где $e^{i\vec{k}\vec{x}}$ — падающая плоская волна, $\mathrm{Im}k = 0$ $(k = |\vec{k}|)$ и v удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда

$$v = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial |\vec{x}|} - ikv = o\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right). \tag{4}$$

Таким образом, функция $\psi(\vec{x})$ имеет следующую асимптотику:

$$\psi(\vec{x}) \xrightarrow[|\vec{x}|\to\infty]{} e^{i\vec{k}\vec{x}} + f(k, \tau)\,\frac{e^{ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}, \tag{5}$$

где $f(k, \tau)$ — амплитуда рассеяния, $\tau = |\vec{k'} - \vec{k}|$ — импульс передачи, $\vec{k}, \vec{k'}$ — импульсы соответственно падающей и рассеянной частицы.

Возможны различные постановки обратной задачи, то есть задачи нахождения потенциала $V(\vec{x})$ по данным рассеяния. Все они, в том числе и задача со спектральными данными, исследованы в работе [1], где доказана их эквивалентность, а также теорема о единственности решения задачи.

Для случая финитных потенциалов определение $V(\vec{x})$ по данным рассеяния при больших k рассматривалось Э. Э. Шполем [2].

В дальнейшем, используя эту идею и предполагая существование решения (2), Л. Д. Фаддеев [3] показал, что не только для финитных, но и для достаточно быстро убывающих потенциалов $V(\vec{x})$ $\left(V(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^{3+\varepsilon}}\right)\right)$ при всех конечных значениях τ имеет место

$$\lim_{k\to\infty} f(k, \tau) = -\frac{\lambda}{4\pi}\int e^{i\vec{\tau}\vec{x}}\,V(\vec{x})\,d\vec{x}. \tag{6}$$

Аналогичное соотношение для того же класса потенциалов может быть получено и из работы Хури [4]. Если же ограничиться случаем не слишком сингулярных в нуле (не сингулярнее $\frac{1}{|\vec{x}|^2}$) финитных потенциалов или потенциалов, убывающих, по крайней мере, как $e^{-|\vec{x}|^2}$, и сферически симметричных, то из [4] легко найти, что при всех конечных значениях τ имеет место

$$\lim_{\alpha>0,\ \alpha\to\infty} f(i\alpha, \tau) = -\frac{\lambda}{4\pi}\int e^{i\vec{\tau}\vec{x}}\,V(\vec{x})\,d\vec{x}. \tag{7}$$

Заметим следующее. Уравнение Шредингера (1) дает правильное описание рассеяния квантово-механических частиц (только такой случай и рассматривается) до тех пор, пока не начинают сказываться релятивистские эффекты. Поэтому в данном случае амплитуда рассеяния $f(k,\tau)$ дает правильное описание только в ограниченной области энергии k^2. Таким образом, с физической точки зрения определение потенциала $V(\vec{x})$ по формуле (6) не является корректным. То же самое можно сказать и в отношении формулы (7).

Подобная трудность, однако, не возникает в случае релятивистских уравнений квантовой механики.

Рассмотрим обратную задачу сначала для уравнения Клейна — Гордона, описывающего рассеяние частиц со спином нуль (π-мезоны K-мезоны и т. д.) во внешнем поле $V(\vec{x})$.

Рассмотрим уравнение

$$(\Delta + k^2)\,\psi(\vec{x}) = (2\lambda EV(\vec{x}) - \lambda^2 V^2(\vec{x}))\,\psi(\vec{x}), \tag{8}$$

где

$$E = \pm\sqrt{k^2 + m^2} \tag{9}$$

и m — масса частицы.

В дальнейшем будем считать, что потенциалы $V(\vec{x})$ имеют в нуле особенность не выше $\frac{1}{|\vec{x}|}$ и что они либо финитны, либо сферически симметричны и убывают, по крайней мере, как $e^{-|\vec{x}|^2}$.

Тогда, как показано в (5), для матрицы рассеяния $T(k,\tau)$, которая с точностью до множителя $-\frac{1}{4\pi}$ равна амплитуде рассеяния, имеет место выражение:

$$\begin{gathered}
T(k,\tau) = \int e^{i\vec{\tau}\vec{x}}W(\vec{x})\,d\vec{x} + \\
+ \int \exp\left[-i\left(k^2 - \frac{\tau^2}{4}\right)^{1/2}\vec{n}\vec{r}\right] W\left(\vec{R} + \frac{1}{2}\vec{r}\right)\frac{e^{ikr}}{4\pi r} W\left(\vec{R} - \frac{1}{2}\vec{r}\right) e^{-i\vec{\tau}\vec{R}}\,d\vec{r}d\vec{R} + \\
+ \int \exp\left[-i\left(k^2 - \frac{\tau^2}{4}\right)^{1/2}\vec{n}\vec{r}\right] W\left(\vec{R} + \frac{1}{2}\vec{r}\right) H\left(k;\vec{R} + \frac{1}{2}\vec{r}, \vec{R} - \frac{1}{2}\vec{r}\right) \times \\
\times e^{-i\vec{\tau}\vec{R}}\,d\vec{r}d\vec{R} + \int \exp\left[-i\left(k^2 - \frac{\tau^2}{4}\right)^{1/2}\vec{n}\vec{r}\right] W\left(\vec{R} + \frac{1}{2}\vec{r}\right) H\left(k;\vec{R} + \right. \\
\left. + \frac{1}{2}\vec{r}, \vec{z}\right)\frac{e^{ik|\vec{z} - \vec{R} + \frac{1}{2}\vec{r}|}}{4\pi|\vec{z} - \vec{R} + \frac{1}{2}\vec{r}|} W\left(\vec{R} - \frac{1}{2}\vec{r}\right) e^{-i\vec{\tau}\vec{R}}\,d\vec{z}\,d\vec{r}\,d\vec{R},
\end{gathered} \tag{10}$$

где

$$W(\vec{x}) = 2\lambda EV(\vec{x}) - \lambda^2 V^2(\vec{x}), \tag{11}$$

$\vec{n}$ — единичный вектор в направлении рассеяния и $H(k;\vec{x},\vec{y})$ — резольвента интегрального уравнения

$$\begin{gathered}
\psi(\vec{x}) = e^{ik\vec{x}} - \int \frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{y}|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} W(\vec{y})\,e^{i\vec{k}\vec{y}}\,d\vec{y} + \\
+ \int\left[\int \frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{z}|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{z}|} W(\vec{z})\frac{e^{ik|\vec{z} - \vec{y}|}}{4\pi|\vec{z} - \vec{y}|}\,d\vec{z}\right] W(\vec{y})\,\psi(\vec{y})\,d\vec{y}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Интегрирование в (10) и в (12) выполняется или по конечному пространству, в случае финитных потенциалов, или по всему пространству.

Выражение (10) определено для всех действительных k и для всех конечных действительных τ.

Положим теперь в (10) $k = im$. Используя полученную в [5] оценку для резольвенты

$$|H(im; \vec{x}, \vec{y})| \leqslant Ce^{-m|\vec{x}-\vec{y}|} \frac{\lambda^2 V^2(\vec{y})}{4\pi|\vec{y}|}, \tag{13}$$

где C — постоянная, легко заметить, что $T(im, \tau)$ существует при всех конечных действительных τ. Переходя к пределу при $m \to \infty$, из (9), (10), (11) и (13) найдем, что при всех конечных действительных τ

$$\lim_{m\to\infty} T(im, \tau) = -\lambda^2 \int e^{i\vec{\tau}\vec{x}} V^2(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{14}$$

Поскольку $T(k,\tau)$ может быть определена при сколь угодно больших энергиях и τ и допускает аналитическое продолжение по k в верхнюю полуплоскость, то выполняя такое аналитическое продолжение, обратную задачу для уравнения (8) вполне корректно и однозначно можно решить с помощью формулы (14).

Перейдем к случаю рассеяния ачстиц со спином $^1/_2$ (электроны, протоны и т. п.) в потенциальном поле $V(\vec{x})$. Рассеяние этих частиц описывается системой уравнений Дирака

$$(E + i\vec{\alpha}\nabla - \beta m)\, \psi(\vec{x}) = V(\vec{x})\, \psi(\vec{x}), \tag{15}$$

где $\vec{\alpha}$ и β — некоторые 4×4 матрицы и

$$\psi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x}) \\ \psi_2(\vec{x}) \\ \psi_3(\vec{x}) \\ \psi_4(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

Рассматривая уравнения (15), Хури [6] построил матрицу рассеяния $R(k, \tau)$ в (обозначениях работы [6] — $T(k,\tau)$) для потенциалов более широкого класса, чем рассматриваемые нами. Не выписывая явный вид $R(k,\tau)$, заметим, что в случае рассматриваемых нами потенциалов легко показать, что имеет место соотношение, аналогичное (14),

$$\lim_{m\to\infty} R(im, \tau) = \int e^{i\vec{\tau}\vec{x}} V(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{16}$$

где τ любое конечное действительное.

Сделаем следующее замечание. При построении матрицы рассеяния для уравнений (8) и (15) существенно использовался факт существования решения. Как показал А. Я. Повзнер [7], решение уравнения (1) существует, если k^2 не есть точка дискретного положительного спектра. Аналогичное положение имеется и в случае уравнений (8) и (15) (см. [5], [6]).

Для случая рассмотренных выше потенциалов отсутствие положительного дискретного спектра для уравнения (1) доказано в [7]. То же самое имеет место и для уравнения (8), а также, по-видимому, для системы (15).

Поэтому, если будет доказано отсутствие положительного дискретного спектра для уравнений (8) и (15) в случае сферически несимметричных потенциалов $V(\vec{x})$ таких, что

$$|V(\vec{x})| \leqslant V(|\vec{x}|),$$

причем $V(|\vec{x}|)$ убывает, по крайней мере, как $e^{-|\vec{x}|^2}$, и имеет в нуле особенность не выше $\frac{1}{|\vec{x}|}$, результаты (14) и (16) будут справедливы и для этого класса потенциалов.

В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность члену-корреспонденту АН УССР О. С. Парасюку за постановку задачи и ценные консультации и доктору физико-математических наук Ю. М. Березанскому за ценное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Березанский, Труды Моск. матем. об-ва, 7 (1958).
2. Э. Э. Шполь, Диссертация, Москва, МГУ, 1954.
3. Л. Д. Фаддеев, Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., № 7 (1956).
4. N. N. Khuri, Phys. Rev., 107, N 4 (1957).
5. В. И. Мальченко, Дисперсионные соотношения для рассеяния бесспиновых релятивистских частиц внешним скалярным полем, УМЖ, т. XI, № 3, 1959.
6. N. N. Khuri, Phys. Rev., 109, N 1 (1958).
7. А. Я. Повзнер, Матем. сб., 32 (74): I (1953).

Поступила
15.IV 1959 г.
Днепропетровск