Об одном нелинейном интегральном уравнении

М. И. Розовский

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$y(t) + \int_0^t [P(t,\tau)\, y(\tau) + qQ(t,\tau)\, y^2(\tau)]\, d\tau = F(t). \tag{1}$$

Уравнение (1) связано с задачей теории нелинейной ползучести с учетом старения материала, рассмотренной автором в [1].

Целью настоящей заметки является определение $y(t) > 0$ из уравнения (1) при $q > 0$, $F(t) > 0$ и слабо сингулярных ядрах $P(t,\tau) > 0$ и $Q(t,\tau) > 0$. Эти условия вытекают из физической сущности процесса, описанного в [1].

Здесь представляется возможность обобщить интегрально-операторный способ, развитый автором [2] при решении линейного интегро-дифференциального уравнения, применительно к нелинейному интегральному уравнению (1).

Введем интегральные операторы, воздействующие на некоторые функции $f_1(t)$ и $f(t)$:

$$\overset{*}{P} f_1 = \int_0^t P(t,\tau)\, f_1(\tau)\, d\tau, \quad \overset{*}{Q} f_2 = \int_0^t Q(t,\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau.$$

Тогда уравнение (1) примет интегрально-операторную форму

$$(1 + \overset{*}{P})\, y + q\overset{*}{Q} y^2 = F. \tag{2}$$

Решая уравнение (2) относительно y, получим

$$y=\frac{-(1+\overset{*}{P})+(1+\overset{*}{P})\sqrt{1+\dfrac{4q\overset{*}{Q}F}{(1+\overset{*}{P})^2}}}{2q\overset{*}{Q}}. \tag{3}$$

В выражении (3) знак перед радикалом взят плюс потому, что, как отмечалось выше, из физических соображений интерес представляет лишь случай, когда $y>0$.

Всегда можно подобрать такой параметр малости q, при котором

$$0<\frac{4qF\overset{*}{Q}}{(1+\overset{*}{P})^2}<1.$$

Поэтому справедливо разложение

$$y=\frac{F}{1+\overset{*}{P}}+\frac{1+\overset{*}{P}}{2q\overset{*}{Q}}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\left[\frac{4qF\overset{*}{Q}}{(1+\overset{*}{P})^2}\right]^n. \tag{4}$$

Из (4) следует

$$y=(1-\overset{*}{R})F+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}F^n(4q)^{n-1}[\overset{*}{Q}{}^{n-1}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{(2n-1)\,2n\ldots(2n+\nu-2)}{\nu!}\overset{*}{Q}{}^{n-1}\overset{*}{P}{}^{\nu}\Bigg], \tag{5}$$

где ядро оператора $\overset{*}{R}$ представляет собой резольвенту ядра $P(t,\tau)$, а степенные функции операторов $\overset{*}{Q}{}^{n-1}$ и $\overset{*}{Q}{}^{n-1}\overset{*}{P}{}^{\nu}$ выражаются надлежащим образом через повторные ядра исходных ядер $P(t,\tau)$ и $Q(t,\tau)$.

Эксперименты на ползучесть показывают [3], что наиболее целесообразно выразить операторы $\overset{*}{P}$ и $\overset{*}{Q}$ через операторы Абеля $\overset{*}{I}_{\alpha}$ и $\overset{*}{I}_{\beta}$ с ядрами

$$P(t,\tau)=I_{\alpha}(t,\tau)=\frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)},\quad Q(t,\tau)=I_{\beta}(t,\tau)=\frac{(t-\tau)^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)},$$

где $-1<\alpha<0$, $-1<\beta<0$.

Принимая во внимание теорему умножения операторов Абеля [3] $\overset{*}{I}_{\alpha}\overset{*}{I}_{\beta}=\overset{*}{I}_{\alpha+\beta+1}$, получим

$$\overset{*}{Q}{}^{n-1}=\overset{*}{I}_{(n-1)\beta+1},\quad \overset{*}{Q}{}^{n-1}\overset{*}{P}{}^{\nu}=\overset{*}{I}_{(n-1)\beta+\nu\alpha+3}. \tag{6}$$

Так как

$$\frac{1}{1-\overset{*}{I}_{\alpha}}=1+\overset{*}{Э}_{\alpha},$$

где ядро оператора $\overset{*}{Э}_{\alpha}$ представляет собой экспоненциальную функцию дробного порядка Ю. Н. Работнова (3)

$$Э_\alpha(t,\tau) = (t-\tau)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}, \tag{7}$$

то оператор $\overset{*}{R} = \overset{*}{Э}_\alpha$.

Подставляя (6) и (7) в (5), получим после расшифровки смысла интегральных операторов искомое решение

$$y(t) = F(t) - \int_0^t Э_\alpha(t,\tau) F(\tau)\,d\tau +$$

$$+ 2\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \int_0^t \Bigg\{ [F(\tau)]^n (4q)^{n-1} \Bigg[\frac{(t-\tau)^{(n-1)\beta+1}}{\Gamma[(n-1)\beta+2]} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(2n-1)\,2n\ldots(2n+\nu-2)}{\nu!} \frac{(t-\tau)^{(n-1)\beta+\nu\alpha+3}}{\Gamma[(n-1)\beta+\nu\alpha+4]} \Bigg] \Bigg\} d\tau. \tag{8}$$

При $F(t) = F_0 = \mathrm{const}$ (случай, отвечающий процессу деформирования при постоянной нагрузке) из (8) имеем

$$y(t) = F_0 E_{1-\alpha}(t^{1-\alpha}) +$$

$$+ 2\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \Bigg\{ F_0^n (4q)^{n-1} \Bigg[\frac{t^{(n-1)\beta+2}}{\Gamma[(n-1)\beta+3]} + \tag{9}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(2n-1)\,2n\ldots(2n+\nu-2)}{\nu!} \frac{t^{(n-1)\beta+\nu\alpha+4}}{\Gamma[(n-1)\beta+\nu\alpha+5]} \Bigg] \Bigg\},$$

где $E_\mu(\xi) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\Gamma(n\mu+1)}$ — функция Миттаг-Леффлера [4] порядка $\mu = 1-\alpha$.

Появление в (9) функции Миттаг-Леффлера обусловлено обнаруженной нами связью между оператором $\overset{*}{Э}_\alpha$ при воздействии его на единицу и функцией $E_{1-\alpha}$ согласно нижеследующему:

$$\overset{*}{Э}_\alpha \cdot 1 - \int_0^t Э_\alpha(t,\tau)\,d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{(1-\alpha)(n+1)}}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha)+1]} = 1 - E_{1-\alpha}(t^{1-\alpha}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Розовский, О нелинейных уравнениях ползучести и релаксации материалов при сложном напряженном состоянии, Ж. техн. физ., АН СССР, т. XXV, в. 13, 1955.

2. М. И. Розовский, Полусимволический способ решения некоторых задач теории наследственной упругости, ДАН СССР, т. III, № 5, 1956.

3. Ю. Н. Работнов, Равновесие упругой среды с последействием, Прикл. матем. и мех., т. XII, в. I, 1948.

4. A. Wiman, Über den Fundamentalsatz in der Theorie der Functionen $E_\alpha(x)$. Acta Matematica. Bd. 29, p. 191, 1905.

Поступила
12.V 1958 г.
Днепропетровск