О необходимых и достаточных условиях избирательной инвариантности

Н. И. Симонов

С помощью матричного метода в данной работе выясняются необходимые и достаточные условия избирательной инвариантности для линейных систем дифференциальных уравнений второго порядка. Мы придерживаемся определений, данных в статьях Н. И. Лузина [1] и В С. Кулебакина [2].

Рассмотрим систему

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

где $a_{ij} = a_{ij}(D)$ — линейные операторы второго порядка с постоянными коэффициентами с символом дифференцирования D; f_i — произвольные функции t, имеющие производные достаточно высокого порядка*. Предполагается, что система (1) неособая:

$$\Delta(D) = \operatorname{Det} |a_{ij}| \neq 0. \qquad (2)$$

Решение $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем называть регулярным, если все его компоненты дважды непрерывно дифференцируемы.

---

* Заведомо достаточно наличие n—1 непрерывных производных.

Сначала найдем необходимое и достаточное условие независимости компоненты x_1 любого регулярного решения относительно какой-либо одной компоненты $f_k(t)$ вектор-матрицы правой части.

Теорема I. *Необходимое и достаточное условие инвариантности компоненты x_1 относительно компоненты $f_k(t)$ заключается в выполнении тождества $A_{k1}(D) \equiv 0$, где $A_{k1}(D)$ — минор элемента a_{k1} детерминанта матрицы исходной системы.*

Обозначим через L матрицу $\{\lambda_{ij}(D)\}$, приводящую (1) к каноническому виду в смысле определения [1] (см. [1], стр. 8). Напомним, что существование такой матрицы L доказано в [1] для произвольных линейных неособых систем с постоянными коэффициентами. Обозначая через $\overset{*}{a}_{ij}$ элементы канонической матрицы, имеем матричное равенство

$$\begin{bmatrix} \overset{*}{a}_{11} & \overset{*}{a}_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \overset{*}{a}_{1n} \\ \overset{*}{a}_{21} & \overset{*}{a}_{22} & \cdots & \overset{*}{a}_{2,n-1} & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{*}{a}_{k1} & \cdots & \overset{*}{a}_{k,n-k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{*}{a}_{n1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_k \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & \cdots & \lambda_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ f_k \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где

$$\begin{bmatrix} \overset{*}{a}_{11} & \overset{*}{a}_{12} & \cdots & \cdots & \overset{*}{a}_{1n} \\ \overset{*}{a}_{21} & \overset{*}{a}_{22} & \cdots & \overset{*}{a}_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{*}{a}_{n1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

при этом, как известно.

$$\overset{*}{a}_{n1}\overset{*}{a}_{n-1,2}\ldots\overset{*}{a}_{1n} \not\equiv 0. \tag{2'}$$

Учитывая в (4) равенства элементов последних строк, получаем равенства, которые должны выполняться тождественно по D:

$$\overset{*}{a}_{n1} = \lambda_{n1}a_{11} + \lambda_{n2}a_{21} + \ldots + \lambda_{nk}a_{k1} + \ldots + \lambda_{nn}a_{n1}, \tag{5_1}$$

$$0 = \lambda_{n1}a_{12} + \lambda_{n2}a_{22} + \ldots + \lambda_{nk}a_{k2} + \ldots + \lambda_{nn}a_{n2}, \tag{5_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \lambda_{n1}a_{1k} + \lambda_{n2}a_{2k} + \ldots + \lambda_{nk}a_{kk} + \ldots + \lambda_{nn}a_{nk}, \tag{5_k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \lambda_{n1}a_{1n} + \lambda_{n2}a_{2n} + \ldots + \lambda_{nk}a_{kn} + \ldots + \lambda_{nn}a_{nn}. \tag{5_n}$$

Из матричного соотношения (3) находим дифференциальное уравнение, которому обязана удовлетворять компонента x_1,

$$\overset{*}{a}_{n1}x_1 = \lambda_{n1}f_1 + \lambda_{n2}f_2 + \ldots + \lambda_{nk}f_k + \ldots + \lambda_{nn}f_n. \tag{6}$$

Отсюда сразу же следует, что x_1 не будет зависеть от f_k в том и только в том случае, когда выполняется тождество

$$\lambda_{nk}(D) \equiv 0. \tag{7}$$

(напомним, что все компоненты вектор-матрицы правой части системы (1) независимы между собой).

Выразим условие (7) через коэффициенты исходной системы.

Из равенств $(5_2), (5_3), \ldots, (5_n)$ при выполнении (7) следуют равенства:

$$\lambda_{n1}a_{12} + \ldots + \lambda_{n,k-1}a_{k-1,2} + \lambda_{n,k+1}a_{k+1,2} + \ldots + \lambda_{nn}a_{n2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_{n1}a_{1n} + \ldots + \lambda_{n,k-1}a_{k-1,n} + \lambda_{n,k+1}a_{k+1,n} + \ldots + \lambda_{nn}a_{nn} = 0.$$

В силу неособенности исходной системы, матрица L, как это доказано Лузиным, будет также неособой. Отсюда следует, что система (7_1) обязана допускать нетривиальное решение относительно

$$\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \ldots, \lambda_{n,k-1}, \lambda_{n,k+1}, \ldots, \lambda_{nn}$$

(в противном случае при выполнении (7) матрица L была бы вырожденной). Это означает необходимость выполнения тождества

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,2} & a_{k-1,3}, & \ldots, & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,2} & a_{k+1,3}, & \ldots, & a_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2}, & a_{n3}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} \equiv 0. \qquad (8)$$

В левой части мы получили минор A_{k1} элемента a_{k1} характеристического детерминанта исходной системы. Итак, необходимое условие инвариантности x_1 от f_k состоит в выполнении тождества

$$A_{k1}(D) \equiv 0. \qquad (8)$$

Докажем достаточность этого условия. Для этого покажем, что из тождества (8) следует тождество (7). Введём в рассмотрение матрицу Λ с элементами $\Lambda_{ij}(D)$, обратную канонизирующей матрице L.

Умножая матричное равенство (4) слева на матрицу Λ, получаем

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \ldots & \Lambda_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Lambda_{k1} & \Lambda_{k2} & \ldots & \Lambda_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Lambda_{n1} & \Lambda_{n2} & \ldots & \Lambda_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & \ldots & & a^*_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ a^*_{k1} & a^*_{k,n-k+1}, & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ a^*_{n1} & 0 & \ldots & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Пользуясь этим тождеством, подсчитаем минор A_{k1} элемента a_{k1}. Имеем из (9):

$$a_{12} = \sum_{j=1}^{n-1} \Lambda_{1j}a^*_{j2}, \quad a_{13} = \sum_{j=1}^{n-2} \Lambda_{1j}a^*_{j3}, \ldots, \quad a_{1n} = \Lambda_{11}a^*_{1n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{k2} = \sum_{j=1}^{n-1} \Lambda_{kj}a^*_{j2}, \ldots\ldots, \quad a_{kn} = \Lambda_{k1}a^*_{1n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n2} = \sum_{j=1}^{n-1} \Lambda_{nj}a^*_{j2}, \ldots\ldots, \quad a_{nn} = \Lambda_{n1}a^*_{1n}.$$

Отсюда, пользуясь разложением получаемого детерминанта на сумму соответствующих детерминантов, находим

$$\begin{vmatrix} a_{12}, & a_{13}, \ldots\ldots, & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{k-1,2}, & \ldots\ldots, & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,2}, & \ldots\ldots, & a_{k+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n,2} & \ldots\ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n-1} \Lambda_{1j} a^*_{j2}, & \sum\limits_{j=1}^{n-2} \Lambda_{1j} a^*_{j3}, \ldots, & \Lambda_{11} a^*_{1n} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \sum\limits_{j=1}^{n-1} \Lambda_{k-1,j} a^*_{j2}, & \sum\limits_{j=1}^{n-2} \Lambda_{k-1,j} a^*_{j3}, \ldots, & \Lambda_{k-1,1} a^*_{1,n} \\ \sum\limits_{j=1}^{n-1} \Lambda_{k+1,j} a^*_{j2}, & \sum\limits_{j=1}^{n-2} \Lambda_{k+1,j} a^*_{j3} \ldots, & \Lambda_{k+1,1} a^*_{1n} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \sum\limits_{j=1}^{n-1} \Lambda_{nj} a^*_{j2}, & \sum\limits_{j=1}^{n-2} \Lambda_{nj} a^*_{j3}, \ldots, & \Lambda_{n1} a^* \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \Lambda_{1,n-1} a^*_{n-1,2}, & \Lambda_{1,n-2} a^*_{n-2,3}, & \ldots, \Lambda_{11} a^*_{1n} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \Lambda_{k-1,n-1} a^*_{n-1,2}, & \Lambda_{k-1,n-2} a^*_{n-2,3}, & \ldots, \Lambda_{k-1,1} a^*_{1n} \\ \Lambda_{k+1\,n-1} a^*_{n-1,2}, & \Lambda_{k+1,n-2} a^*_{n-2,3}, & \ldots, \Lambda_{k+1,1} a^*_{1n} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \Lambda_{n,n-1} a^*_{n-1,2}, & \Lambda_{n,n-2} a^*_{n-2,3}, & \ldots, \Lambda_{n1} a^*_{1n} \end{vmatrix}.$$

Все остальные детерминанты, как легко видеть, равны нулю, так как все они имеют по крайней мере по два одинаковых столбца.

Таким образом, имеем

$$A_{k1} = a^*_{1n} a^*_{2,n-1} \ldots a^*_{n-1,2} \begin{vmatrix} \Lambda_{1,n-1}, & \Lambda_{1,n-2}, & \ldots, & \Lambda_{11} \\ \Lambda_{2,n-1}, & \Lambda_{2,n-2}, & \ldots, & \Lambda_{21} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \Lambda_{k-1,n-1}, & & \ldots, & \Lambda_{k-1,1} \\ \Lambda_{k+1,n-1}, & & \ldots, & \Lambda_{k+1,1} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \Lambda_{n,n-1}, & & \ldots, & \Lambda_{n1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\nu} a^*_{1n} a^*_{2,n-1} \ldots a^*_{n-1,2} \cdot \begin{vmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12}, & \ldots, & \Lambda_{1,n-1} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22}, & \ldots, & \Lambda_{2,n-1} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \Lambda_{k-1,1}, & & \ldots, & \Lambda_{k-1,n-1} \\ \Lambda_{k+1,1}, & & \ldots, & \Lambda_{k+1,n-1} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \Lambda_{n,1}, & & \ldots, & \Lambda_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

где ν означает сумму числа необходимых транспозиций. Это означает, что мы получили соотношение

$$A_{k1}(D) = (-1)^{\cdot} a_{1n}^{*} \cdot a_{2,n-1}^{*} \ldots a_{n-1,2}^{*} \cdot M_{\Lambda_{k,n}}, \tag{10}$$

где через $M_{\Lambda_{kn}}$ обозначен минор элемента Λ_{kn} детерминанта матрицы Λ. С другой стороны, по известным свойствам обратных матриц справедливо тождество

$$\lambda_{n,k} = \frac{(-1)^{n+k}}{\mathrm{Det}\,|\Lambda_{ij}|} \cdot M_{\Lambda_{kn}}. \tag{11}$$

В силу предполагаемого выполнения тождества (8), из (10) следует тождество

$$M_{\Lambda_{kn}} \equiv 0, \tag{10'}$$

так как произведение $a_{1n}^{*} \ldots a_{n-1,2}^{*}$ по условию (2′) не может обращаться в нуль.

Из (10′) и равенства (11) следует искомое тождество $\lambda_{nk} \equiv 0$, что и доказывает достаточность условия.

Переходим к решению более общей задачи. Найдем необходимое и достаточное условие инвариантности компоненты x_1 относительно каких-либо k элементов вектор-матрицы правой части. Не ограничивая общности, предположим, что этими элементами являются первые k, т. е. функции $f_1(t)$, $f_2(t), \ldots, f_k(t)$. При этом можем считать, что число k удовлетворяет неравенствам $2 \leqslant k \leqslant n-1$. Значение $k = 1$ соответствует частному случаю доказанной выше теоремы.

Решение только что указанной общей задачи является непосредственным следствием теоремы I. Действительно, при независимости x_1 от всех k компонент $f_1, f_2, \ldots, f_k$ вектор-матрицы правой части должны выполняться необходимые условия независимости x_1 от каждого отдельного элемента $f_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ из этих k элементов. В силу теоремы I, это означает, что необходимым условием указанной инвариантности является тождественное выполнение равенств

$$A_{11}(D) \equiv 0, \; A_{21}(D) \equiv 0, \ldots, \; A_{k1}(D) \equiv 0. \tag{8$_1$}$$

По той же теореме I следует, в свою очередь, что выполнение этих k тождеств влечет независимость x_1 от каждого из k элементов $f_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, вектор-матрицы правой части исходной системы. Таким образом, доказана

Т е о р е м а II. *Необходимое и достаточное условие инвариантности $x_1(t)$ относительно $f_1(t)$, $f_2(t), \ldots, f_n(t)$ состоит в выполнении тождеств* (8_1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Л у з и н, К изучению матричной теории дифференциальных уравнений, Автоматика и телемеханика, № 5, 1940.

2. В. С. К у л е б а к и н, О применимости принципа абсолютной инвариантности в физических реальных системах, ДАН СССР, т. 60, № 2, 1948.

Поступила
15. X 1959г. Киев