Разложимость дифференциального оператора на множители и теорема о дифференциальных неравенствах

В. Я. Скоробогатько

Пусть в некоторой области D задан дифференциальный оператор L порядка s, представляющий произведение дифференциальных операторов L_k меньших порядков, $Lt = L_1 \dots L_k \dots L_m t$. Предположим, что операторы L_k, $k = 1, \dots, m$, таковы, что удовлетворяют «условиям С. А. Чаплыгина», под чем подразумевается следующее: если $Lz_1 \geqslant Lz_2$, то $L_i \dots L_m z_1 \geqslant L_i \dots L_m z_2$, $i = 1, \dots, m + 1$; $L_{m+1} = 1$. В рассматриваемом случае, очевидно, содержится утверждение (теорема о дифференциальных неравенствах): если $Lw_1 \geqslant Lw_2$, то $w_1 \geqslant w_2$. Поэтому если оператор L разлагается на произведение множителей, удовлетворяющих «условиям С. А. Чаплыгина», то для него справедлива теорема о дифференциальных неравенствах; проверка этого факта для конкретных операторов представляет интерес. Всякий признак, позволяющий утверждать, что оператор L разлагается в произведение операторов рассматриваемого типа, является одновременно достаточным признаком для выполнения теоремы о дифференциальных неравенствах. В конце заметки приводится один такой признак для обыкновенного дифференциального оператора. Иногда теорема о дифференциальных неравенствах следует из разложимости на множители $L_1, \dots, L_m$ оператора L.

Некоторые важные задачи математической физики описываются операторами рассматриваемого типа. На основании изложенного можно получать оценки сверху и снизу для решений таких задач.

Рассмотрим этот вопрос для динамической системы уравнений теории упругости.

Рассмотрим задачу с начальными условиями для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \omega(x, y), \tag{1}$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x, y).$$

Предполагается, что ω и ψ дважды непрерывно дифференцируемы, а φ трижды непрерывно дифференцируема. Это решение дается формулой (см., например, [3])

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\iiint\limits_G \frac{\omega(\xi, \eta, \tau)}{\sqrt{\Gamma}}\,d\xi d\eta d\tau + \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_B \frac{\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{\Gamma}}\,d\xi d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_B \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{\Gamma}}\,d\xi d\eta. \tag{2}$$

В формуле (2) B — круг, определяемый уравнением $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \leqslant a^2t^2$; $\Gamma = (at - a\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2$; область G — часть конуса $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - (at - a\tau)^2 = 0$, заключенная между его вершиной и плоскостью $\tau = 0$. Решение u_1 той же задачи при тех же начальных условиях для однородного волнового уравнения описывается той же формулой при $\omega = 0$. Отсюда следует, что если при всех значениях аргументов $\omega \geqslant 0$, то $u_1 \leqslant u$, и если $\omega \leqslant 0$, то $u_1 \geqslant u$.

Рассмотрим задачу с начальными условиями для динамической системы уравнений теории упругости:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta^2 u = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta^2 v = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \tag{3}$$

$$u\Big|_{t=0} = f_1(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_2(x, y),$$

$$v\Big|_{t=0} = \varphi_1(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_2(x, y). \tag{3'}$$

Покажем, что решение задачи с начальными условиями (3′) для уравнений (3) может быть сведено к решению задачи с начальными условиями для двух раздельных уравнений четвертого порядка. Легко подсчитывается, что

$$L\theta = \left[\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (+\lambda + 2\mu)\Delta^2\right]\theta = 0.$$

Применим оператор L к уравнениям (3), тогда получим, что функции u и v должны удовлетворять уравнениям

$$\left[\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\Delta^2\right]\left(\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\Delta^2\right)u = 0,$$

$$\left[\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\Delta^2\right]\left(\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\Delta^2\right)v = 0. \tag{4}$$

Введя обозначение $M = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\Delta^2$, запишем систему (4) более сокращенно:

$$LMu = 0, \quad LMv = 0.$$

Конечно, всякое решение u, v системы (3) является одновременно и решением системы (4), но обратное заключение неверно. Покажем, что при повышенной гладкости решений вместо того, чтобы решать задачу с начальными условиями для системы (3), можно решить задачу Коши с начальными условиями для системы (4).

Пусть найдено решение u, v задачи Коши системы уравнений (3) с начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = f_1(x, y), \; \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_2(x, y),$$
$$v\Big|_{t=0} = \varphi_1(x, y), \; \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_2(x, y). \tag{5}$$

Начальные условия (5) останутся такими же и для функций u, v, удовлетворяющих уравнениям (4). Но существует не единственная пара функций, удовлетворяющих уравнениям (4) и начальным условиям (5). Для единственности решения задачи с начальными условиями для системы (4) нужно еще определить

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = f_3(x, y), \; \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_{t=0} = f_4(x, y),$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = \varphi_3(x, y), \frac{\partial^3 v}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = \varphi_4(x, y). \tag{6}$$

Воспользуемся системой (3) и доопределим путем дифференцирования по аргументу t производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = f_3, \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_{t=0} = f_4, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = \varphi_3, \frac{\partial^3 v}{\partial t^3}\Big|_{t=0} = \varphi_4.$$

Таким образом, вместо того, чтобы решать задачу Коши для системы (3), можно ее решить для разделенной системы (4) с начальными условиями (5) и доопределенными условиями (6)

Решение задачи Коши для системы (4) при начальных условиях (5) и (6) будет совпадать с решением задачи Коши (3), (5).

Теорема. *Пусть подобраны функции u_1, v_1, шесть раз непрерывно дифференцируемые, для которых в некоторой области G* при $t \geqslant 0$ выполняются условия*: $LMu_1 \geqslant 0$, $LMv_1 \geqslant 0$, причем

$$\frac{\partial^k u_1}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = f_{k+1}(x, y), \; k = 0, 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial^k v_1}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \varphi_{k+1}(x, y), \; k = 0, 1, 2, 3.$$

Тогда в той же области $u_1 \geqslant u$, $v_1 \geqslant v$.

---

* $G \subset D$ — коническая область с образующими, наклоненными к плоскости $t = 0$ под углом $\gamma \leqslant \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\lambda + 2\mu}}$.

Доказательство. Для операторов L и M выполняются «условия С. А. Чаплыгина» на основании формулы (4), поэтому $u_1 \geqslant u$, $v_1 \geqslant v$.

Следствие. Если функции u_1, v_1 при тех же начальных условиях удовлетворяют дифференциальным неравенствам $LMu_1 \leqslant 0$, $LMv_1 \leqslant 0$, то следует, что $u_1 \leqslant u$, $v_1 \leqslant v$.

Приведенная теорема позволяет заключить в «вилку» решение задачи Коши для системы уравнений теории упругости и может быть использована в инженерных расчетах.

Для обыкновенного линейного уравнения можно указать изящный признак разложимости его левой части на произведение действительных сомножителей, принадлежащий Г. Маммана [2]. Приведем доказательство этого признака более простое, чем у Г. Маммана.

Пусть в сегменте $[a, b]$ задано дифференциальное уравнение

$$L_n y = \frac{d^n}{dx^n} y + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y + \ldots + a_n(x) y = 0. \tag{7}$$

Коэффициенты $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $x \in [a, b]$, непрерывны.

Теорема. *Для того чтобы оператор $L_n y$ разлагался в произведение линейных действительных множителей первого порядка с непрерывными коэффициентами, необходимо и достаточно, чтобы каждое решение $y \not\equiv 0$ уравнения* (1) *обращалось в нуль в сегменте $[a, b]$ не более чем $(n-1)$ раз.*

Доказательство. Необходимость. Пусть оператор $L_n y$ представлен в виде

$$L_n y = \left[\frac{d}{dx} + \alpha_1(x)\right] \cdot \ldots \cdot \left[\frac{d}{dx} + \alpha_n(x)\right] y = L_{n-1}\left[\frac{d}{dx} + \alpha_n(x)\right] y$$

Применим метод индукции. При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Предположим, что необходимость имеет место для оператора $L_{n-1} z$ и установим ее для $L_n y$. Пусть некоторое решение $y \not\equiv 0$ имеет в точках $x_1, \ldots, x_m$ нули кратностей $k_1, \ldots, k_m$, причем $k_1 + \ldots + k_m \geqslant n$, тогда выражение $\omega = \left(\frac{d}{dt} + \alpha_n(x)\right) y$ имеет в точках $x_1, \ldots, x_m$ нули кратностей $k_1 - 1, \ldots, k_m - 1$ и между точками $x_1, \ldots, x_m$ будет расположена по меньшей мере $(m - 1)$ точка, где функция $\omega = 0$.

Действительно, предположим, что функция y имеет на концах интервала x_i, x_{i+1} нули порядков k_i и k_{i+1}, функция

$$y = \left| \int_x^x \omega(\eta) e^{\int_{x_i}^{\eta} \alpha_n(\xi) d\xi} d\eta \right| e^{-\int_{x_i}^{x} \alpha_n(\xi) d\xi}.$$

Если бы функция ω не меняла знака в интервале $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$, то функция y не имела бы нуля в точке x_{i+1}, а это противоречиво.

Достаточность. Непосредственной проверкой устанавливается тождество

$$Ly = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} \ln \frac{w_k}{w_{k-1}}\right) y,$$

где

$$w_k = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_k \\ y_1' & \ldots & y_k' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(k-1)} & \ldots & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n, \ w_0 = 1.$$

а $y_1, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений уравнения (1), которое возможно в том случае, если $w_k \neq 0$ при $x \subset [a, b]$.

Пусть фундаментальная система определяется начальными условиями $y^{(j)}_{n-k} = 0$, $k \neq j$, $y^{(j)}_{n-k} = 1$, $k = j$. В этом случае ни одно $w_k \neq 0$ в полуинтервале $(a, b]$. Действительно, если некоторое $w_k(\xi) = 0$, $a < \xi \leqslant b$, то существуют константы $c_1, \ldots, c_k$, такие, что $c_1 y_1^{(i)}(\xi) + \ldots + c_k y_k^{(i)}(\xi) = 0, i = 0, \ldots, k-1$, но тогда решение $y = c_1 y_1 + \ldots + c_k y_k$ обращается n раз в нуль в сегменте $[a, b]$. Противоречие завершает доказательство теоремы. Если оператор $L_n\varphi$ разлагается в произведение линейных действительных сомножителей, то при $L_n\varphi \gtreqless 0$ и $\varphi^k(0) = \beta_k$, $k = 0, \ldots, n-1$, $\varphi \gtreqless u$, где u — решение задачи Коши для уравнения (7) с начальными условиями $u^{(k)}(0) = \beta_k$, $k = 0, \ldots, n-1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чаплыгин, Избранные труды по механике и математике, стр. 493—496.

2. G. Mammana, Decomposizione delle expressioni differenziali lineari omogenee in prodotto di fattori, e applicazione relative allo studio delle equazioni differenziali lineari, Math. Zeitschrift, 33 (1931), 186—231.

3. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 2, Гостехиздат, 1945, стр. 497—502.

Поступила 23. III 1959 г.
Львов