Об одном классе векторных изотропных случайных полей

М. И. Ядренко

Случайное поле $\overline{\xi}(P)=\{\xi_1(P),\ \xi_2(P),\dots,\xi_m(P)\}$ в n-мерном пространстве будем называть изотропным в широком смысле, если при каждом i ($i = 1, 2,\dots, m$) $M\xi_i(P)$ не зависит от P (не ограничивая общности, считаем $M\xi_i(P)=0$), $M|\xi_i(P)|^2<\infty$, а корреляционная матрица $\xi(P)$

$$B(r)=\| M\xi_i(P_1)\,\xi_k(P_2)\|$$

зависит только от расстояния r между точками P_1 и P_2.
Дисперсионную матрицу поля $\bar{\xi}(P)$ будем обозначать в дальнейшем $\|b_{ik}\|$.

Это определение соответствует системе m изотропных скалярных полей в R^n, изотропно связанных между собой. Такие системы полей иногда рассматриваются в приложениях (см., например, [1], где изучается система, состоящая из поля давления и поля температуры). Основные сведения из теории изотропных скалярных и векторных полей приведены в [2].

Случайное поле $\bar{\xi}(P)$ будем называть полем марковского типа относительно семейства $\mathfrak{M}$ замкнутых жордановых поверхностей в R^n, если какова бы ни была поверхность S и каковы бы ни были точки P_1 и P_2, разделенные поверхностью S, случайные векторы $\bar{\xi}(P_1)$ и $\bar{\xi}(P_2)$ независимы, если известны значения $\xi(P)$ на S.

В [3] были изучены гауссовские скалярные изотропные случайные поля марковского типа в евклидовом и гильбертовом пространствах. Настоящая заметка примыкает к статье [3] и существенно использует ее результаты.

Предположим в дальнейшем, что $\bar{\xi}(P)$ — гауссовское, непрерывное в среднем квадратичном, поле. Тогда имеет место

Теорема 1. *Корреляционная матрица $B(r)$ гауссовского изотропного поля марковского типа относительно семейства $\mathfrak{M}$, содержащего все сферы, имеет вид $\|B_{ik}(r)\|$, где*

$$B_{ik}(r)=2^{\frac{n-4}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left[(b_{ii}+b_{kk}+2b_{ik})\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\gamma_{ik}r)}{(\gamma_{ik}r)^{\frac{n-2}{2}}}-b_{ii}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\gamma_{ik}r)}{(\gamma_{ik}r)^{\frac{n-2}{2}}}-\right.$$

$$\left.-b_{kk}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\gamma_{kk}r)}{(\gamma_{kk}r)^{\frac{n-2}{2}}}\right] \tag{1}$$

$$(\gamma_{ik}\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,m).$$

Функции $\xi_i(P)$, в предположении сепарабельности, с вероятностью единица любое число раз дифференцируемы и удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta\xi_i(P)+\gamma_{ii}^2\xi_i(P)=0. \tag{2}$$

При задании значений поля на поверхности S, которая удовлетворяет условиям существования и единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения (2), *значения $\bar{\xi}(P)$ однозначно восстанавливаются внутри области, ограниченной S.*

Для доказательства заметим, что

$$\eta(P,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\xi_i(P) \tag{3}$$

есть гауссовское скалярное изотропное поле марковского типа. Поэтому, в силу [3], корреляционная функция этого поля равна:

$$M\eta(P_1)\,\eta(P_2)=\sum_{i,k}\alpha_i\alpha_kB_{ik}(r)=2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\sum_{i,k}b_{ik}\alpha_i\alpha_k\right)\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)r)}{(\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)r)^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{4}$$

где $\gamma(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — некоторая функция от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m^*$. Из (4), в частности, следует, что функции $B_{k}(r)$ любое число раз дифференцируемы по r. Дифференцируя (4) дважды по r и полагая $r = 0$, получаем

$$\gamma^2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = \frac{-n\sum \alpha_i\alpha_k B''_{ik}(0)}{\sum \alpha_i\alpha_k b_{ik}}. \tag{5}$$

Используя выражение билинейной формы $\sum\limits_{i,k} B_{ik}\alpha_i\beta_k$ через квадратичные формы и соотношение (5), получаем (1), где коэффициенты γ_{ik} имеют вид

$$\gamma_{ik} = \sqrt{\frac{-n(B''_{ii}(0) + B''_{kk}(0) + 2B''_{ik}(0))}{b_{ii} + b_{kk} + 2b_{ik}}}. \tag{6}$$

Отметим, что, в силу положительной определенности форм $\sum b_{ik}\alpha_i\alpha_k$ и $\sum \alpha_i\alpha_k(-nB''_{ik}(0))$, γ_{ik} имеет смысл. В частности, при $i = k$ получаем из (1)

$$B_{kk}(r) = b_{kk}2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\gamma_{kk}r)}{(\gamma_{kk}r)^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{7}$$

а это свидетельствует о том, что каждая компонента $\xi_i(P)$ есть скалярное поле марковского типа. Из этого замечания и из результатов статьи [3] следуют остальные утверждения теоремы 1.

Пусть теперь P — точка сепарабельного гильбертового пространства H, а $\xi(P)$ — m-мерное изотропное (в указанном в начале заметки смысле) поле. Рассуждениями, сходными с теми, которые приведены при доказательстве теоремы 1, может быть доказана

Теорема 2. *Гауссовское случайное поле $\xi(P)$ марковского типа в сепарабельном гильбертовом пространстве H имеет корреляционную матрицу $\| B_{ik}(r) \|$,*

$$B_{ik}(r) = \frac{1}{2}[b_{ii} + b_{kk} + 2b_{ik}]\,e^{-\frac{1}{2}\gamma_{ik}^2 r^2} - \frac{1}{2}b_{kk}e^{-\frac{1}{2}\gamma_{ii}^2 r^2} - \frac{1}{2}b_{kk}e^{-\frac{1}{2}\gamma_{kk}^2 r^2},$$

где числа γ_{ik} удовлетворяют указанным в теореме 1 условиям. При задании значений поля на любой сфере S значения внутри сферы однозначно восстанавливаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Яглом, Однородная и изотропная турбулентность в сжимаемой жидкости, Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., т. 12, 1948, 501—522.

2. А. М. Яглом, Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, Теория вероятностей и ее приложения, т. II, № 3, 1958.

3. М. И. Ядренко, Изотропные гауссовские случайные поля марковского типа в евклидовом и гильбертовом пространствах, Труды IV Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1959.

Поступила
17. II 1959 г. Киев