Об одном соотношении в теории равномерных и интегральных приближений

И. Е. Гопенгауз и *А. Л. Рабинович*

Пусть $W^{(r)}LK$ обозначает класс функций $f(x)$ периода 2π, имеющих абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка и производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, для которой

$$\|f^{(r)}\|_L = \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(x)|\,dx \leqslant K,$$

где $r = 1, 2, \ldots$; $W^{(0)}LK$ — класс функций периода 2π с $\|f\|_L = \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx \leqslant K$, а $W^{(r)}MK$ — класс функций f периода 2π, имеющих абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка и ограниченную производную r-го порядка, для которой $\|f^{(r)}\|_M = \operatorname{vraisup}_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |f^{(r)}(t)| \leqslant K$ ($r = 1, 2, \ldots$; $W^{(0)}MK$ — класс функций f периода 2π с $\|f\|_M = \operatorname{vraisup}_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |f(x)| \leqslant K$). Полагая

$$U_n(f;\lambda) = U_n(f, x; \lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где $\lambda_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n+1$; $\lambda_0^{(n)} = 1$, $\lambda_{n+1}^{(n)} = 0$) — любая треугольная матрица чисел, a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, рассматриваем верхние грани

$$E_n(W^{(r)}LK; \lambda)_L = \sup_{f\in W^{(r)}LK} \|f - U_n(f;\lambda)\|_L$$

и

$$E_n(W^{(r)}MK; \lambda)_M = \sup_{f\in W^{(r)}MK} \|f - U_n(f;\lambda)\|_M.$$

Известно [1], что для любой треугольной матрицы чисел $\lambda_k^{(n)}$ имеет место неравенство

$$E_n(W^{(r)}LK; \lambda)_L \leqslant E_n(W^{(r)}MK; \lambda)_M \quad (r > 0), \tag{1}$$

которое в ряде интересных случаев (суммы Фурье, суммы Фейера, наилучшие линейные методы приближения) обращается в точное или асимптотическое равенство. В настоящей заметке устанавливается, что асимптотическое равенство имеет место для любых линейных методов приближения с матрицей λ_k^n, удовлетворяющей условиям:

$$\mu_k^{(n)} \leqslant \mu_{k+1}^{(n)}, \quad \mu_k^{(n)} - 2\mu_{k+1}^{(n)} + \mu_{k+2}^{(n)} \geqslant 0, \tag{2}$$

где $\mu_k^{(n)} = \dfrac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}$.

Действительно, из результатов А. Ф. Тимана [2] следует, что при выполнении условий (2)

$$E_n(W^{(r)}MK;\lambda)_M = \frac{4K}{\pi^2}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r(n-k+1)} - \frac{\ln n}{n}\right| + O\left(\frac{1}{n^r}\right) \tag{3}$$

равномерно относительно всех рассматриваемых матриц.

Если принять еще во внимание неравество (1), то, очевидно, остается только доказать, что $E_n(W^rLK;\lambda)_L$ не меньше выражения, стоящего в правой части (3).

Доказательство последнего факта опирается на следующее соотношение [1]:

$$E_n(W^{(r)}LK;\lambda)_L = \frac{K}{2\pi}\max_t\int_0^{2\pi}|\psi_\lambda(x)-\psi_\lambda(x+t)|\,dx, \tag{4}$$

где

$$\psi_\lambda(t)=\psi_{n,\lambda}^{(r)}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^{(n)}}{k^r}\cdot\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right).$$

Имеем, вследствие (4).

$$E_n(W^{(r)}LK;\lambda)_L=\frac{K}{2\pi}\cdot\max_t\int_0^{2\pi}\{\psi_\lambda(x)-\psi_\lambda(x+t)\}\cdot\operatorname{sign}\{\psi_\lambda(x)-\psi_\lambda(x+t)\}\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\frac{K}{2\pi}\cdot\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\psi_\lambda(x)-\psi_\lambda\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right\}\cdot\operatorname{sign}\left\{x^r\cdot\sin\left(n|x|+\frac{r\pi}{2}\right)\right\}dx\right|.$$

Благодаря тому, что

$$\int_a^{a+c/n}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)\right|dt=O\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}\frac{1-\lambda_n^{(n)}}{k^r}\right)$$

и

$$\int_a^{a+c/n}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}\right|dt=O\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

будет

$$E_n(W^{(r)}LK;\lambda)_L\geqslant\frac{K}{\pi}\cdot\left|\int_{-\pi}^{\pi}\psi_\lambda(x)\cdot\operatorname{sign}\left\{x^r\cdot\sin\left(n|x|+\frac{r\pi}{2}\right)\right\}dx\right|+$$

$$+O\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right)+O\left(\frac{1}{n^r}\right)=\frac{2K}{\pi}\cdot\left|\int_0^{\pi}\psi_\lambda(x)\operatorname{sign}\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx\right|+$$

$$+O\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right)+O\left(\frac{1}{n^r}\right)=\frac{8K}{\pi^2}\cdot\left|\int_0^{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}\right\}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2k+1)\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)\right]}{2k+1}dx\right|+$$

$$+ O\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right) + O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Проводя рассуждения А. Ф. Тимана, использованные им при оценке подобного интеграла [2], получаем:

$$E_n(W^{(r)}LK;\lambda)_L \geqslant \frac{4K}{\pi^2}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} - \frac{\ln n}{n^r}\right| +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right) + O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Остается еще учесть, что при выполнении условий (2)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} = O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Если матрица чисел $\lambda_k^{(n)}$ удовлетворяет условиям (2), то при $n\to\infty$ и для всех целых $r>0$ имеет место асимптотическое равенство*

$$\left.\begin{array}{l} E_n(W^{(r)}LK;\lambda)_L \\ E_n(W^{(r)}MK;\lambda)_M \end{array}\right\} = \frac{4K}{\pi^2}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r(n-k+1)} - \frac{\ln n}{n^r}\right| + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

равномерно относительно всех рассматриваемых матриц.

Заметим, что при $r=0$ положение значительно упрощается. В этом случае всегда

$$\sup_{f\in W^{(0)}LK}||U_n(f;\lambda)||_L = \sup_{f\in W^{(0)}MK}||U_n(f;\lambda)||_M = \frac{K}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kt\right|dt$$

Для некоторых классов матриц $\lambda_k^{(n)}$ асимптотическое поведение последнего интеграла известно [3].

В заключение мы считаем своим долгом выразить благодарность проф. А. Ф. Тиману за постановку задачи и интерес, проявленный к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский, Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Изв. АН СССР, сер. матем., 10, № 3, 1946, 207—256.

2. А. Ф. Тиман, Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье, Изв. АН СССР, сер. матем., 17, № 1, 1953, 99—134.

3. А. Ф. Тиман, О линейных процессах приближения алгебраическими многочленами, функциях Лебега и некоторых приложениях к рядам Фурье, ДАН, 101, № 2, 1955, 221—224.

Поступила 26. V 1958 г.
Днепропетровск