Асимптотическое интегрирование нелинейных автономных систем со многими степенями свободы в области внутреннего резонанса

П. М. Сеник

В работе [1] был разработан метод асимптотического интегрирования нелинейных автономных систем со многими степенями свободы, позволяющий изучить периодическое состояние системы вдали от внутреннего резонанса для случая, когда порождающая система имеет решение, зависящее только от двух произвольных постоянных.

Однако как теоретический, так и практический интерес представляет случай, когда система находится в области внутреннего резонанса, а решение порождающей системы зависит от многих произвольных постоянных. Решение аналогичной задачи другим методом приводится в статье [3], где автор сводит неавтономную систему к автономной. Но нам кажется, что распространение метода Н. Н. Боголюбова на поставленную задачу будет более эффективным для ее количественного и качественного изучения.

Пусть колебания системы с N степенями свободы описываются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} - \sum_{r=1}^{N} a_{sr} x_r = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n f_{sn}(x_1, \ldots, x_N), \tag{1}$$

где функции f_{sn} имеют конечные производные N' — 1-го порядка по всем переменным x_s, ε — малый параметр, $a_{sr} = -a_{rs}$ — постоянные коэффициенты.

Считаем, что характеристическое уравнение порождающей системы имеет M'' нулевых и M' пар различных чисто мнимых корней, вида $\pm i\omega_l$, $l = 1, 2, \ldots, M = M'' + M'$, где $\omega_l = 0$ для $l = M' + 1, \ldots, M$.

Пусть между величинами ω_l существует зависимость

$$\omega_l = \sum_{\gamma=1}^{M} k_{\gamma l}\, \omega_\gamma, \quad (l = 1, 2, \ldots, M'), \tag{2}$$

где $k_{\gamma l}$ — произвольные целые числа.

Решение системы (1) ищем с помощью разложений

$$x_s = \sum_{l=1}^{M} a_l [\bar{\varphi}_{sl} \cos(\Theta_l + \psi_l) + \bar{\bar{\varphi}}_{sl} \sin(\Theta_l + \psi_l)] + \\ + \sum_{n=1}^{N'} \varepsilon^n u_{sn}(a_1, \ldots, a_{M'}, \psi_1, \ldots, \psi_{M'}, \Theta_1, \ldots, \Theta_{M'}), \tag{3}$$

в которых u_{sn} являются периодическими функциями углов ψ_l, $\Theta_l = \omega_l t$ с периодом 2π, а величины a_l и ψ_l как функции времени определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{da_l}{dt} = \sum_{n=1}^{N'} \varepsilon^n \sum_{k_{1l}, \ldots, k_{M'l}} A^{(n)}_{k_{1l} \ldots k_{M'l}}(a_1, \ldots, a_{M'}, \psi_1, \ldots, \psi_{M'}),$$

$$\frac{d\psi_l}{dt} = \sum_{n=1}^{N'} \varepsilon^n \sum_{k_{1l}, \ldots, k_{M'l}} B^{(n)}_{k_{1l} \ldots k_{M'l}}(a_1, \ldots, a_{M'}, \psi_1, \ldots, \psi_{M'}). \tag{4}$$

где $A^{(n)}_{k_{1l} \ldots k_{M'l}}$ и $B^{(n)}_{k_{1l} \ldots k_{M'l}}$ подлежат такому определению, чтобы (3) удовлетворяло (1), когда a_l и ψ_l удовлетворяют (4); $k_{1l}, \ldots, k_{M'l}$ должны удовлетворять (2).

Постоянные величины $\bar{\varphi}_{sl}, \bar{\bar{\varphi}}_{sl}$, $(l = 1, 2, \ldots, M')$ являются нетривиальным решением системы однородных алгебраических уравнений

$$\omega_l \bar{\varphi}_{sl} + \sum_{r=1}^{N} a_{sr} \bar{\bar{\varphi}}_{rl} = 0,$$

$$\omega_l \bar{\bar{\varphi}}_{sl} - \sum_{r=1}^{N} a_{sr} \bar{\varphi}_{rl} = 0. \tag{5}$$

Считаем, что $\overline{\varphi}_{sl}$ — нормированные величины, то есть

$$\sum_{s=1}^{N} \overline{\varphi}_{sl}^{2} = 1. \tag{6}$$

Введем обозначение

$$\sum_{s,r=1}^{N} a_{sr}\, \overline{\varphi}_{sl}\, \overline{\varphi}_{rl} = \alpha_l. \tag{7}$$

Учитывая (5), (6), (7) и то, что $a_{sr} = -a_{rs}$, определяем некоторые свойства величин $\overline{\varphi}_{sl}$, $\overline{\overline{\varphi}}_{sl}$:

$$\sum_{s,r}^{N} a_{sr}\, \overline{\varphi}_{sl}\, \overline{\varphi}_{r\nu} = 0, \quad \sum^{N} \overline{\varphi}_{sl}\, \overline{\varphi}_{s\nu} = 0, \quad (l \neq \nu), \tag{8}$$

$$\sum_{s,r=1} a_{sr}\, \overline{\varphi}_{sl}\, \overline{\varphi}_{r\nu} = 0, \quad \sum_{s=1}^{N} \overline{\varphi}_{sl}\, \overline{\overline{\varphi}}_{s\nu} = 0,$$

$$\sum_{s,r=1}^{N} a_{sr}\, \overline{\varphi}_{sl}\, \overline{\overline{\varphi}}_{rl} = -\,\omega_l, \quad \sum_{s=1}^{N} \overline{\varphi}_{sl}\, \overline{\overline{\varphi}}_{sl} = \frac{\alpha_l}{\omega_l}. \tag{9}$$

Для случая, когда $\omega_l = 0$ необходимо положить $\overline{\varphi}_{sl} = \overline{\overline{\varphi}}_{sl} = 0$.

Дифференцируя (3) по времени и учитывая при этом (2) и (4), находим

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum^{M'} a_l \left[-\overline{\varphi}_{sl} \sin(\Theta_l + \psi_l) + \overline{\overline{\varphi}}_{sl} \cos(\Theta_l + \psi_l)\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N'} \sum_{l=1}^{M} \Big\{ \varepsilon^n\, \omega_l \frac{\partial u_{sn}}{\partial \Theta_l} + \sum_{k_{1l},\ldots,k_{M'l}} [A^{(n)}_{k_{1l}\ldots k_{M'l}} (\overline{\varphi}_{sl} \cos\psi_l +$$

$$+ \overline{\overline{\varphi}}_{sl} \sin\psi_l) + a_l B^{(n)}_{k_{1l}\ldots k_{M'l}} (-\overline{\varphi}_{sl} \sin\psi_l + \overline{\overline{\varphi}}_{sl} \cos\psi_l)] \cos \sum_{\nu=1}^{M'} k_{\nu l}\, \Theta_\nu +$$

$$+ \sum_{k_{1l},\ldots,k_{M'}} [A^{(n)}_{k_{1l}\ldots k_{M'l}} (-\overline{\varphi}_{sl} \sin\psi_l + \overline{\overline{\varphi}}_{sl} \cos\psi_l) - a_l B^{(n)}_{k_{1l}\ldots k_{M'l}} (\overline{\varphi}_{sl} \cos\psi_l +$$

$$+ \overline{\overline{\varphi}}_{sl} \sin\psi_l)] \sin \sum_{\gamma=1}^{M'} k_{\gamma l}\, \Theta_\gamma + \sum_{k_{1l},\ldots,k_{M'l}} \left[\frac{\partial u_{sm}}{\partial a_l} A^{(k)}_{k_{1l}\ldots k_{M'l}} + \frac{\partial u_{sm}}{\partial \psi_l} B^{(k)}_{k_{1l}\ldots k_{M'l}}\right]\Big\}, \tag{10}$$

где $m + k = n$, $(m, k, n = 1, 2, \ldots, N')$,

$$u_{s,-m} = A^{(-k)}_{k_{1l}\ldots k_{M'l}} = B^{(-k)}_{k_{1l}\ldots k_{M'l}} = 0. \tag{11}$$

Правую часть (1), учитывая (3), разлагаем в ряд

$$\sum_{n=1}^{N'} \varepsilon^n f_{sn}(x_1, \ldots, x_N) = \varepsilon f_{s1}(u_{10}, \ldots, u_{N0}) +$$

$$+ \varepsilon^2 \left[f_{s2}(u_{10}, \ldots, u_{N0}) + \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial f_{s1}(u_{10}, \ldots, u_{N0})}{\partial x_r} u_{r1}\right] + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{N'} \varepsilon^n F_{sn}(a_1, \ldots, a_{M'}, \beta_1, \ldots, \beta_{M'}, \psi_1, \ldots, \psi_{M'}). \tag{12}$$

где $u_{s0} = x_s|_{\varepsilon=0}$.

Подставляем (3), (10) и (12) в (1) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε. Полученные выражения умножаем на $\widehat{\varphi}_{s\nu}$ и суммируем по s. Находим

$$\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{M'} \omega_l \frac{\partial u_{sn}}{\partial \Theta_l} \bar{\varphi}_{s\nu} - \sum_{s,r=1}^{N} a_{sr} u_{sn} \bar{\varphi}_{r\nu} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{M'} \sum_{k_{1l},\ldots,k_{M'}} \Big\{ [A^{(n)}_{k_{1l}\ldots k_{M'l}} (\bar{\varphi}_{sl} \bar{\varphi}_{s\nu} \cos\psi_l + \bar{\bar{\varphi}}_{sl} \bar{\varphi}_{s\nu} \sin\psi_l) -$$

$$- a_l B^{(n)}_{k_{1l}\ldots k_{M'l}} (\bar{\varphi}_{sl} \bar{\varphi}_{s\nu} \sin\psi_l - \bar{\bar{\varphi}}_{sl} \bar{\varphi}_{s\nu} \cos\psi_l)] \cos \sum_{\gamma=1}^{M'} k_{\gamma l} \Theta_\gamma -$$

$$- [A^{(n)}_{k_{1l}\ldots k_{M'l}} (\bar{\varphi}_{sl} \bar{\varphi}_{s\nu} \sin\varphi_l - \bar{\bar{\varphi}}_{sl} \bar{\varphi}_{s\nu} \cos\psi_l) + a_l B^{(n)}_{k_{1l}\ldots k_{M'l}} (\bar{\varphi}_{sl} \bar{\varphi}_{s\nu} \cos\psi_l +$$

$$+ \bar{\bar{\varphi}}_{sl} \bar{\varphi}_{s\nu} \sin\psi_l)] \sin \sum_{\gamma=1}^{M'} k_{\gamma l} \Theta_\gamma + \bar{\varphi}_{s\nu} \frac{\partial u_{sm}}{\partial a_l} A^{(k)}_{k_{1l}\ldots k_{M'}} +$$

$$+ \bar{\varphi}_{s\nu} \frac{\partial u_{sm}}{\partial \psi_l} B^{(k)}_{k_{1l}\ldots k_{M'l}} \Big\} = \sum_{s=1}^{N} \bar{\varphi}_{s\nu} F_{sn}. \tag{13}$$

Правую часть (13) разлагаем в ряд Фурье по аргументу $\beta_l = \Theta_l + \psi_l$. Имеем

$$\sum_{s=1}^{N} \bar{\varphi}_{s\nu} F_{sn} = R^{(n\nu)} = \sum_{n_{1\nu},\ldots,n_{M'\nu}=-\infty}^{\infty} \Big[\bar{R}^{(n)}_{n_{1\nu}\ldots n_{M'\nu}} \cos \sum_{l=1}^{M'} n_{l\nu} \beta_l +$$

$$+ \bar{\bar{R}}^{(n)}_{n_{1\nu}\ldots n_{M'\nu}} \sin \sum_{l=1}^{M'} n_{l\nu} B_l \Big] = \sum_{n_{1\nu},\ldots,n_{M'\nu}=-\infty}^{\infty} \Big\{ \Big[\bar{R}^{(n)}_{n_{1\nu}\ldots n_{M'\nu}} \cos \sum_{l=1}^{N'} n_{l\nu} \psi_l +$$

$$+ \bar{\bar{R}}^{(n)}_{n_{1\nu}\ldots n_{M'\nu}} \sin \sum_{l=1}^{M'} n_{l\nu} \psi_l \Big] \cos \sum_{l=1}^{M'} n_{l\nu} \theta_l + \Big[\bar{\bar{R}}^{(n)}_{n_{1\nu}\ldots n_{M'\nu}} \cos \sum_{l=1}^{M'} n_{l\nu} \psi_l -$$

$$- \bar{R}^{(n)}_{n_{1\nu}\ldots n_{M'\nu}} \sin \sum_{l=1}^{M'} n_{l\nu} \psi_l \Big] \sin \sum_{l=1}^{M'} n_{l\nu} \Theta_l \Big\}, \tag{14}$$

где

$$\bar{R}^{(n)}_{n_{1\nu}\ldots n_{M'\nu}} = \frac{1}{(2\pi)^{M'}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} R^{(n\nu)} \cos \sum_{l=1}^{M'} n_{l\nu} \beta_l \, d\beta_1 \ldots d\beta_{M'},$$

$$\bar{\bar{R}}^{(n)}_{n_{1\nu}\ldots n_{M'\nu}} = \frac{1}{(2\pi)^{M'}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} R^{(n\nu)} \sin \sum_{l=1}^{M'} n_{l\nu} \beta_l \, d\beta_1 \ldots d\beta_{M'}.$$

Решение уравнения (13) представим в виде

$$u_{sn} = \sum_{p=1}^{M'} \sum_{n_{1p},\ldots,n_{M'p}=-\infty}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_{sp} \bar{L}^{(n)}_{n_{1p}\ldots n_{M'p}} \cos \sum_{\gamma=1}^{M'} n_{\gamma p} \Theta_\gamma + \right.$$

$$\left. + \bar{\bar{\varphi}}_{sp} \bar{\bar{L}}^{(n)}_{n_{1p}\ldots n_{M'p}} \sin \sum_{\gamma=1}^{M'} n_{\gamma p} \Theta_\gamma \right\}, \tag{15}$$

где

$\bar{L}^{(n)}_{n_{1p}\ldots n_{M'p}}(a_1, \ldots, a_{M'}, \psi_1, \ldots, \psi_{M'})$ и $\bar{\bar{L}}^{(n)}_{n_{1p}\ldots n_{M'p}}(a_1, \ldots a_{M'}, \psi_1, \ldots \psi_{M'})$

— неизвестные функции.

Из (15) находим

$$\frac{\partial u_{sn}}{\partial \Theta_l} = \sum_{p=1}^{M'} \sum_{n_{1p}\ldots n_{M'p}=-\infty}^{\infty} n_{lp} \left\{ - \bar{\varphi}_{sp} \bar{L}^{(n)}_{n_{1p}\ldots n_{M'p}} \sin \sum_{\gamma=1}^{M'} n_{\gamma p} \Theta_\gamma + \right.$$

$$\left. + \bar{\bar{\varphi}}_{sp} \bar{\bar{L}}^{(n)}_{n_{1p}\ldots n_{M'p}} \cos \sum_{\gamma=1}^{M'} n_{\gamma p} \Theta_\gamma \right\}. \tag{16}$$

Чтобы исключить из функций u_{sn} резонансные члены, налагаем на них условие, что выражения $\sum_{s,r=1}^{N} a_{sr} u_{sn} \bar{\varphi}_{sl}$ и $\sum_{s,r=1}^{N} u_{sn} \bar{\varphi}_{sl}$ не содержат гармоники порядка $\sum_{\gamma=1}^{M'} k_{\gamma l} \Theta_\gamma$, где $k_{\gamma l}$, $(\gamma, l = 1, 2, \ldots, M')$, удовлетворяют условию (2).

Подставляя (14), (15), (16) в (13) и учитывая (6), (7), (8) и (9) и условие, наложенное на функцию u_{sn}, определяем

$$\bar{L}^{(n)}_{n_{1\nu}\ldots n_{M'\nu}} = \frac{1}{\left(\sum_{\gamma=1}^{M'} n_{\gamma\nu} \omega_\gamma\right)^2 - \omega_\nu^2} \left[\frac{\omega_\nu^2}{\alpha_\nu} \bar{\bar{P}}^{(n)}_{n_{1\nu}\ldots n_{M'\nu}} - \sum_{\gamma=1}^{M'} n_{\gamma\nu} \omega_\gamma \bar{P}^{(n)}_{n_{1\nu}\ldots n_{M'\nu}} \right],$$

$$\bar{\bar{L}}^{(n)}_{n_{1\nu}\ldots n_{M'\nu}} = \frac{1}{\left(\sum_{\gamma=1}^{M'} n_{\gamma\nu} \omega_\gamma\right)^2 - \omega_\nu^2} \left[\frac{\omega_\nu^2}{\alpha_\nu} \bar{P}^{(n)}_{n_{1\nu}\ldots n_{M'\nu}} - \sum_{\gamma=1}^{M'} n_{\gamma\nu} \omega_\gamma \bar{\bar{P}}^{(n)}_{n_{1\nu}\ldots n_{M'\nu}} \right], \tag{17}$$

причем $n_{\gamma\nu} \neq k_{\gamma\nu}$, и

$$A^{(n)}_{k_{1\nu}\ldots k_{M'\nu}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_\nu}{\omega_\nu}\right)^2} \left[\left(\bar{R}^{(n)}_{k_{1\nu}\ldots k_{M'\nu}} + \frac{\alpha_\nu}{\omega_\nu} \bar{\bar{R}}^{(n)}_{k_{1\nu}\ldots k_{M'\nu}} \right) \cos \left(\sum_{\gamma=1}^{M'} k_{\gamma\nu} \psi_\gamma - \psi_\nu \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\alpha_\nu}{\omega_\nu} \bar{R}^{(n)}_{k_{1\nu}\ldots k_{M'\nu}} + \bar{\bar{R}}^{(n)}_{k_{1\nu}\ldots k_{M'\nu}} \right) \sin \left(\sum_{\gamma=1}^{M'} k_{\gamma\nu} \psi_\gamma - \psi_\gamma \right) \right], \tag{18}$$

$$R^{(n)}_{k_{1\nu}\ldots k_{M'}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_\nu}{\omega_\nu}\right)^2} \left[\left(\frac{\alpha_\nu}{\omega_\nu} \bar{R}^{(n)}_{k_{1\nu}\ldots k_{M'\nu}} - \bar{\bar{R}}^{(n)}_{k_{1\nu}\ldots k_{M'\nu}} \right) \cos \left(\sum_{\gamma=1}^{M'} k_{\gamma\nu} \psi_\gamma - \psi_\gamma \right) - \right.$$

$$
-\left(\bar{R}^{(n)}_{k_{1\nu}\dots k_{M'\nu}}-\frac{\sigma_\nu}{\omega_\nu}\bar{\bar{R}}^{(n)}_{k_{1\nu}\dots k_{M'\nu}}\right)\sin\left(\sum_{\gamma=1}^{M}k_{\gamma\nu}\,\psi_\gamma-\psi_\nu\right)\Bigg].
$$

В выражении (17) введено обозначение

$$
\bar{P}^{(n)}_{n_{1\nu}\dots n_{M'\nu}}=\bar{\bar{R}}^{(n)}_{n_{1\nu}\dots n_{M'\nu}}\cos\sum_{l=1}^{M'}n_{l\nu}\,\psi_l-\bar{R}^{(n)}_{n_{1\nu}\dots n_{M'\nu}}\sin\sum_{l=1}^{M'}n_{l\nu}\,\psi_l-\bar{\bar{K}}^{(m,k)}_{n_{1\nu}\dots n_{M'\nu}},
$$

$$
\bar{\bar{P}}^{(n)}_{n_{1\nu}\dots n_{M'\nu}}=\bar{R}^{(n)}_{n_{1\nu}\dots n_{M'\nu}}\cos\sum_{l=1}^{M'}n_{l\nu}\,\psi_l+\bar{\bar{R}}^{(n)}_{n_{1\nu}\dots n_{M'\nu}}\sin\sum_{l=1}^{M'}n_{l\nu}\,\psi_l-\bar{K}^{(m,k)}_{n_{1\nu}\dots n_{M'\nu}},
$$

где на основании (15) обозначено

$$
\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{M'}\sum_{k_{1l},\dots,k_{M'l}}\varphi_{s\nu}\left(\frac{\partial u_{sm}}{\partial a_l}A^{(k)}_{k_{1l}\dots k_{M'l}}+\frac{\partial u_{sm}}{\partial\psi_l}B^{(k)}_{k_{1l}\dots k_{M'l}}\right)=
$$

$$
=\sum_{n_{1\nu},\dots,n_{M\nu}=-\infty}^{\infty}\left[\bar{K}^{(m,k)}_{n_{1\nu}\dots n_{M'\nu}}\cos\sum_{\gamma=1}^{M'}n_{\gamma\nu}\,\Theta_\gamma+\bar{\bar{K}}^{(m,k)}_{n_{1\nu}\dots n_{M'\nu}}\sin\sum_{\gamma=1}^{M'}n_{\gamma\nu}\,\Theta_\gamma\right],
$$

причем $n_{\gamma\nu}\neq k_{\gamma\nu}$,

$$
\bar{K}^{(-m,k)}_{n_{1\nu}\dots n_{M'\nu}}=\bar{K}^{(m,-k)}_{n_{1\nu}\dots n_{M'\nu}}=\bar{\bar{K}}^{(-m,k)}_{n_{1\nu}\dots n_{M'\nu}}=\bar{\bar{K}}^{(m,-k)}_{n_{1\nu}\dots n_{M'\nu}}=0\,.
$$

В заключение отметим, если в (3) $k_{ll}=1$, $k_{\gamma l}=0$ $(\gamma\neq l)$ и нуль не является корнем характеристического уравнения, то правые части (4) зависят только от a_l $(l=1,2,\dots,M)$, что видно из (18) А это значит, что система колеблется вдали от внутреннего резонанса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы, Сб. Ин-та строит мех. АН УССР, № 10, 1949.

2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.

3. Г. Е. Кузмак, К теории неавтономных квазилинейных систем со многими степенями свободы, УМЖ, т. X, № 2, 1958.

4. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.

Поступила 27. I 1959 г.

Львов