К вопросу о решении разностных апроксимаций бигармонических уравнений по методу последовательных приближений

И. Т. Лапушкин

Известно, что уравнения вида

$$u = Su + w, \tag{1}$$

где u (неизвестная) и w (известная ограниченная) в области определения линейного ограниченного оператора S вектор-функции, могут быть решены по методу последовательных приближений, если собственные значения λ оператора S по модулю не превосходят единицы.

Будем рассматривать линейные однородные операторы $\bar{S}$ с осевой симметрией, действующие на функции, определенные в узлах сетки, $\bar{S}u(A) = \sum_k d_k u(A + A_k)$ (A_k — приращения координат точки $A = (x, y)$), для которых:

1) $d_k = d(A + A_k) = d(A_k) = d(-A_k) = d(A'_k) = d(-A'_k)$,

2) $d_k \geqslant 0$,

3) $d_k \neq 0$ лишь для конечного числа точек $(A + A_k)$,

4) $\pm A_k = (\pm x_k;\ \pm y_k)$, $\quad \pm A'_k = (\mp x_k;\ \pm y_k)$.

Л. А. Люстерник [1] показал, что функции семейства $\exp[i(\alpha x + \beta y)]$ являются собственными функциями таких операторов с собственными значениями

$$\bar{\lambda}(\alpha, \beta) = \sum_k d_k \cdot \cos \alpha x_k \cdot \cos \beta y_k.$$

Пусть оператор S является линейной комбинацией операторов $\bar{S}$.

$$Su(A) = \sum_n a_n \bar{S}_n u(A) = \sum_n a_n \sum_k d_k u(A + A_k) \tag{2}$$

Покажем, что функции $\exp[i(\alpha x + \beta y)]$ также будут собственными функциями операторов S.

В самом деле:

$$S \exp[i(\alpha x + \beta y)] = \sum_n a_n \sum_k d_k \exp\{i[\alpha(x + x_k) + \beta(y + y_k)]\} =$$

$$= \sum_n a_n \sum_k d_k \exp[i(\alpha x_k + \beta y_k)] \exp[i(\alpha x + \beta y)].$$

Собственные значения этих операторов имеют вид

$$\lambda(\alpha, \beta) = \sum_n a_n \sum_k d_k \exp[i(\alpha x_k + \beta y_k)].$$

Используя идеи работы [1], можно определить границы спектра собственных значений операторов S. Сужение области определения симметричного оператора-матрицы S (при рассмотрении, например, оператора, определенного не во всей области, а лишь для функций, определенных в узлах некоторой сеточной области, апроксимирующей заданную область и содержащейся в ней) может разве что сузить границы спектра собственных значений этого оператора.

Рассмотрим разностные апроксимации бигармонического оператора ([2], стр. 437, 439):

а) для квадратных сеток

$$u_0 = \sum_{k=1}^{4} \frac{8}{20} u_k - \sum_{k=5}^{8} \frac{2}{20} u_k - \sum_{k=9}^{12} \frac{1}{20} u_k,$$

$$u_0 = \sum_{k=1}^{4} \frac{77}{184} u_k - \sum_{k=5}^{8} \frac{20}{184} u_k - \sum_{k=9}^{12} \frac{14}{184} u_k + \sum_{k=13}^{24} \frac{1}{184} u_k;$$

б) для правильных треугольных сеток

$$u_0 = \sum_{k=1}^{6} \frac{3}{12} u_k - \sum_{k=7}^{12} \frac{1}{12} u_k$$

(в приведенных формулах опущены остаточные члены). Операторы, стоящие в правых частях, имеют вид (2), а коэффициенты a_n равны либо $+1$, либо -1.

Как показывают вычисления, спектр собственных значений этих операторов S находится в границах

$$-\gamma \leqslant \lambda \leqslant \mu \quad (\gamma > 1,\ 0 < \mu \leqslant 1). \tag{3}$$

Для ограниченной области плоскости (для которой рассматривается заданная краевая задача) и фиксированной сетки всегда $\mu < 1$.

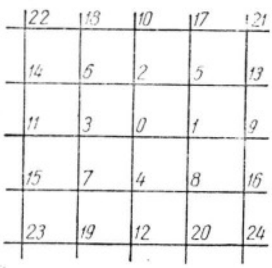

Рис 1.

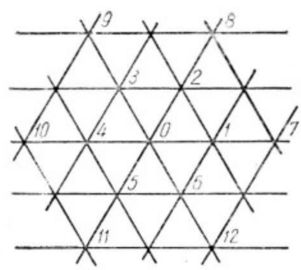

Рис. 2.

Таким образом, метод последовательных приближений (обычный) не может применяться для решения бигармонических задач при использовании указанных выше апроксимационных формул, так как имеются отрицательные собственные значения, превосходящие по модулю единицу.

Однако можно указать такие сеточные апроксимации бигармонического оператора, которые непосредственно пригодны для применения итерационного процесса. В частности, такими апроксимациями будут (нумерацию узлов см. на рис. 1 и 2);

а) для квадратной сетки

$$25h^4 \Delta\Delta u_0 = 212 u_0 - 38 \sum_{k=1}^{8} u_k + 7 \sum_{k=9}^{20} u_k + 2 \sum_{k=21}^{24} u_k + O(h^6);$$

б) для правильной треугольной сетки

$$\frac{9}{8} h^4 \Delta\Delta u_0 = 18 u_0 - 4 \sum_{k=1}^{6} u_k + \sum_{k=7}^{12} u_k + O(h^6)$$

Собственные значения для соответствующих им операторов S находятся (для конечных областей и фиксированной сетки) в таких пределах

$$-1 \leqslant -\gamma \leqslant \lambda \leqslant \mu < 1.$$

Апроксимации, указанные в [2], также могут быть применены для нахождения решения бигармонических задач по методу последовательных приближений, но только после некоторых преобразований.

Пусть уравнение (1) есть разностная апроксимация бигармонической задачи. Заменим это уравнение равносильным ему уравнением

$$u = \frac{S - \delta}{1 - \delta} u + \frac{1}{1 - \delta} w, \tag{4}$$

причем постоянную δ ($\delta \neq 0$, $\delta \neq 1$) выберем так, чтобы обеспечить условия сходимости итерационного процесса. Для этого нужно, чтобы собственные значения λ_δ оператора $S_\delta = \frac{S-\delta}{1-\delta}$ находились в границах

$$-q \leq \lambda_\delta \leq q, \tag{5}$$

где $0 < q < 1$.

Если известны нижняя ($-\gamma$) и верхняя (μ) границы спектра оператора S, то неравенства (5) дают для постоянной δ следующие границы:

$$\frac{\mu - q}{1-q} \leq \delta \leq \frac{-\gamma + q}{1+q}.$$

Постоянная q не может быть произвольно выбрана из интервала (0,1). Для опубликованных в [2] апроксимаций постоянная q должна быть выбрана из интервала (μ, 1). На практике лучше всего выбирать q близким к μ. Однако для конкретных задач точные значения границ спектра найти не легко. Легче всего найти нижнюю границу спектра оператора S для конкретной разностной апроксимации бигармонического оператора. Если эту границу обозначить через $-\gamma'$, то постоянная δ может быть выбрана из условия $\delta \leqslant \frac{-\gamma' + 1}{2}$. На практике лучше всего положить $\delta = \frac{-\gamma' + 1}{2}$.

Условия (5), налагаемые на λ_δ, обеспечивают устойчивость итерационного процесса решения по отношению к начальным ошибкам и вычислительным погрешностям. Это следует из соотношений

$$u - u_n = S_\delta^n (u - u_0) = \sum_i \lambda_{\delta,i}^n c_i \varphi_i,$$

в которых приняты следующие обозначения: u — точное решение уравнения (4), u_n — приближенное значение для u, найденное на n шаге итерации, u_0 — начальное приближение для u, φ_i, $\lambda_{\delta,i}$ — собственные функции и значения оператора S_δ, c_i — постоянные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Люстерник, Успехи математических наук, т. 9, в. 2, 1954.
2. Л. Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953

Поступила 17. VI 1959 г.
Киев