Об одном классе линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

К. А. Бреус

В настоящей статье изложен метод построения решений системы линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega t)\,x + a(\omega t) \quad (0 \leqslant t < \infty), \tag{1}$$

где $x = x(t)$ — n-мерная вектор-функция; $A(\omega t)$ — вещественная матрица, элементы которой суть периодические функции t периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$; ω — «большой» параметр; $a(\omega t)$ — непрерывный вектор.

Содержанием данной статьи является распространение на уравнения вида (1) результатов статьи [1], в которой указан достаточно общий и вместе с тем простой метод доказательства аналитичности относительно параметра $\varepsilon = \omega^{-1}$ фундаментальной матрицы решений однородной системы с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega t)\,x.$$

Здесь также устанавливается аналитичность матрицы решений системы (1) относительно параметра $\varepsilon = \omega^{-1}$ и дается эффективный алгорифм построения самих решений.

1. Уравнение (1), введя обозначение $\tau = \omega t$, сводится к виду

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon\,[A(\tau)\,x + a(\tau)] \quad \varepsilon = \omega^{-1}. \tag{2}$$

Ставится задача преобразовать систему (2) к виду

$$\frac{dy}{d\tau} = \varepsilon\,[\mathfrak{A}y + b(\tau)], \tag{3}$$

где $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\varepsilon)$ — постоянная матрица, аналитическая относительно параметра ε.

С этой целью докажем следующее предложение.

Можно указать неособенную матрицу $U(\tau, \varepsilon)$, аналитическую относительно достаточно малого ε (равномерно по отношению τ), периодическую по τ периода 2π и удовлетворяющую условию $U(0, \varepsilon) = U(2\pi, \varepsilon) = E$ (E — единичная матрица), такую, что система (2) с помощью подстановки

$$x = U(\tau, \varepsilon)\,y \tag{4}$$

приводится к системе (3).

Действительно, выполняя в уравнении (2) замену переменной

$$x = U(\tau, \varepsilon) y$$

и замечая, что y удовлетворяет уравнению (3), получим следующее равенство:

$$\frac{dU}{d\tau} y + \varepsilon (U \mathfrak{A} - AU) y = \varepsilon (a - Ub). \tag{5}$$

Потребуем, далее, чтобы матрица $U(\tau,\varepsilon)$, осуществляющая преобразование уравнения (2) к виду (3), удовлетворяла матричному уравнению

$$\frac{dU}{d\tau} = \varepsilon (AU - U \mathfrak{A}). \tag{6}$$

Последнее уравнение эквивалентно следующему интегральному матричному уравнению:

$$U = E + \varepsilon \int_0^\tau (AU - U\mathfrak{A})\, d\tau. \tag{7}$$

Решение (7) может быть получено в виде ряда

$$U(\tau, \varepsilon) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k U_k(\tau), \tag{8}$$

где

$$U_k(\tau) = \int_0^\tau (AU_{k-1} - U_{k-1} \mathfrak{A})\, d\tau \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ U_0 = E). \tag{9}$$

Как было показано [1], ряд (8) сходится равномерно относительно τ в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$ для достаточно малых ε в предположении аналитичности матрицы $\mathfrak{A}(\varepsilon)$.

Таким образом, доказано существование матрицы $U(\tau, \varepsilon)$ решения уравнения (6), аналитической относительно параметра ε, осуществляющей преобразование исходного уравнения (2) в уравнение (3) при помощи подстановки (4).

Чтобы доказать периодичность матрицы $U(\tau,\varepsilon)$ относительно τ с периодом 2π, покажем, что условию периодичности матрицы $U(\tau,\varepsilon)$ удовлетворяет надлежащий выбор постоянной матрицы $\mathfrak{A}$, входящей в выражение для (8), причем матрица $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ оказывается аналитической функцией параметра ε.

С этой целью заметим, что ряд (8) можно записать в виде

$$U = E + \varepsilon \int_0 (A(\tau) - \mathfrak{A})\, d\tau + \varepsilon^2 \Phi(\tau, \varepsilon, \mathfrak{A}), \tag{10}$$

где $\Phi(\tau, \varepsilon, \mathfrak{A})$ — аналитическая функция относительно ε и $\mathfrak{A}$.

Воспользовавшись условием периодичности матрицы $U(0,\varepsilon) = U(2\pi,\varepsilon) = E$, из соотношения (10) получим уравнение для определения матрицы $\mathfrak{A}$

$$\int_0^{2\pi} (A(\tau) - \mathfrak{A})\, d\tau + \varepsilon \Phi(2\pi, \partial, \mathfrak{A}) = 0,$$

откуда

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} A(\tau)\, d\tau + \varepsilon \Phi(2\pi, \varepsilon, \mathfrak{A}) \right]. \tag{11}$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\mathfrak{A} = F(\varepsilon, \mathfrak{A}), \tag{12}$$

в котором $F(\varepsilon, \mathfrak{A})$ — аналитическая функция относительно ε и $\mathfrak{A}$, представимая в виде следующего разложения:

$$\mathfrak{A} = F(\varepsilon, \mathfrak{A}) = a_{00} + a_{10}\varepsilon + a_{20}\varepsilon^2 + a_{11}\varepsilon\mathfrak{A} + a_{02}\mathfrak{A}^2 + \ldots, \tag{13}$$

причем степень последующих членов будет выше второй.

На основании соответствующих теорем теории неявных функций в окрестности $\varepsilon = 0$ из равенства (12) следует, что $\mathfrak{A}$—аналитическая функция ε при достаточно малом $|\varepsilon|$. Такой выбор $\mathfrak{A}$ гарантирует периодичность $U(\tau, \varepsilon)$ по τ.

Тем самым доказано существование аналитической относительно параметра ε матрицы $U(\tau, \varepsilon)$ (равномерной по отношению τ), периодической по τ периода 2π, преобразующей уравнение (2) к виду (3) с помощью замены

$$x = U(\tau, \varepsilon)\, y.$$

2. Как было показано выше, матрицы $U(\tau, \varepsilon)$ и $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ являются аналитическими функциями параметра ε и, следовательно, могут быть представлены степенными рядами вида

$$U(\tau, \varepsilon) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k U_k(\tau), \tag{14}$$

$$\mathfrak{A}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathfrak{A}_k. \tag{15}$$

Поскольку сходимость этих разложений для достаточно малых значений параметра ε уже установлена, нам остается лишь дать соответствующий алгорифм для определения коэффициентов $U_k(\tau)$ и $\mathfrak{A}_k$. Для этого подставим разложения (14) и (15) в уравнение (6) и сравним в нем коэффициенты при одинаковых степенях. Так, сравнивая коэффициенты при первой степени, получим

$$U_1(\tau) = \int_0^{\tau} (A(\tau) - \mathfrak{A}_0)\, d\tau. \tag{16}$$

Из последнего соотношения, используя условие периодичности $U_1(2\pi) = U_1(0) = 0$, находим

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\tau)\, d\tau.$$

Сравнивая, далее, коэффициенты при (16), получим

$$\frac{dU_2}{d\tau} = A(\tau)\, U_1 - U_1\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_1,$$

откуда

$$U_2 = \int_0^{\tau} [A(\tau)\, U_1 - U_1\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_1]\, d\tau.$$

Воспользовавшись снова условием периодичности U_2, найдем

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A(\tau)\, U_1 - U_1\mathfrak{A}_0]\, d\tau.$$

Продолжая этот процесс и используя на каждом этапе условие периодичности для $U_n(\tau)$: $U_n(2\pi) = U_n(0) = 0$, определим коэффициенты $U_n(\tau)$ и $\mathfrak{A}_n$ и тем самым установим вид разложений (14) и (15).

3. Определив указанным способом матрицы $U(\tau, \varepsilon)$ и $\mathfrak{A}(\varepsilon)$, подстановкой

$$x = U(\tau, \varepsilon)\, y$$

решение исходной системы (2) сводим к нахождению решений системы

$$\frac{dy}{d\tau} = \varepsilon\,[\mathfrak{A}(\varepsilon)\, y + b(\tau)], \tag{3}$$

в которой $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ — постоянная матрица, а вектор

$$b(\tau) = U^{-1} a(\tau).$$

Если решение системы (2) подчинить условию $x(0) = 0$, то решение системы (3), удовлетворяющее соответственно условию $y(0) = 0$, имеет, как известно, вид

$$y(\tau) = \varepsilon \int\limits_0^\tau e^{\varepsilon(\tau - s)\,\mathfrak{A}} b(s)\, ds,$$

Найдя решение преобразованного уравнения (3), получим решение исходного уравнения (2), используя соотношение (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Бреус, Укр. матем. журн., т. Х, № 2, Изд-во АН УССР, 1958.

Поступила 31. V 1960 г.
Киев

Об одном применении полиномов Лежандра

П. Х. Деркач

Для решения некоторых задач механики укажем способ выбора системы ортогональных функций, которые удовлетворяют граничным условиям.

Из выбранных функций построим ряд для приближенного решения дифференциальных уравнений второго порядка (обыкновенных и в частных производных) методами Галеркина или другими.

Известно, что полином Лежандра

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\,\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2)\,\frac{d^2 P_{n+1}(x)}{dx^2} - 2x\,\frac{dP_{n+1}(x)}{dx} + (n+1)(n+2)\,P_{n+1}(x) = 0. \tag{1}$$

В последующем изложении производные от полиномов будем обозначать штрихами, а $P(x)$ через P. Тогда (1) примет следующий вид:

$$(1 - x^2)\,P''_{n+1} = 2xP'_{n+1} - (n+1)(n+2)\,P_{n+1}. \tag{2}$$

В (2) заменим член $2x\,P'_{n+1}$ другим выражением.

Из рекуррентных соотношений для полинома имеем

$$(n+2)\,P_{n+2} - (2n+3)\,xP_{n+1} + (n+1)\,P_n = 0.$$