Об одном применении полиномов Лежандра

П. Х. Деркач

Для решения некоторых задач механики укажем способ выбора системы ортогональных функций, которые удовлетворяют граничным условиям.

Из выбранных функций построим ряд для приближенного решения дифференциальных уравнений второго порядка (обыкновенных и в частных производных) методами Галеркина или другими.

Известно, что полином Лежандра

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\frac{d^2P_{n+1}(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_{n+1}(x)}{dx} + (n+1)(n+2)P_{n+1}(x) = 0. \qquad (1)$$

В последующем изложении производные от полиномов будем обозначать штрихами, а $P(x)$ через P. Тогда (1) примет следующий вид:

$$(1-x^2)P''_{n+1} = 2xP'_{n+1} - (n+1)(n+2)P_{n+1}. \qquad (2)$$

В (2) заменим член $2x\,P'_{n+1}$ другим выражением.

Из рекуррентных соотношений для полинома имеем

$$(n+2)P_{n+2} - (2n+3)xP_{n+1} + (n+1)P_n = 0.$$

Продифференцировав последнее по x, найдем

$$(n+2)P'_{n+2}-(2n+3)P_{n+1}+(n+1)P'_n=(2n+3)xP'_{n+1}. \tag{3}$$

Известно, что

$$P'_{n+2}=(2n+3)P_{n+1}+P'_n. \tag{3a}$$

Подставляя последнее в (3), получим

$$2xP'_{n+1}=2(n+1)P_{n+1}+2P'_n.$$

Отсюда, учитывая (2), находим

$$\psi_n(x)=(1-x^2)P''_{n+1}=-n(n+1)P_{n+1}+2P'_n. \tag{4}$$

Пусть

$$\varphi_i(x)=P_{i+1}-\frac{2}{i(i+1)}P'_i; \quad i=1,2,3\ldots. \tag{5}$$

Заменяя в (3а) n на $n-1$, имеем

$$P'_{n+1}-P'_{n-1}=(2n+1)P_n.$$

Отсюда

$$P'_{2m}=\sum_{\nu=1}^{m}(4\nu-1)P_{2\nu-1}. \tag{6}$$

Аналогично производная от полинома нечетного порядка выражается через полиномы четного порядка

$$P'_{2m+1}=\sum_{\nu=0}^{m}(4\nu+1)P_{2\nu}. \tag{7}$$

Докажем, что система функций (5) ортогональна на интервале $(-1,+1)$, т. е. что

$$\int_{-1}^{+1}\varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx=0; \quad i\neq k.$$

1. i и k четные.

Пусть $i=2s$; $k=2r$ $r>s>0$,

$$\int_{-1}^{+1}\varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx=\int_{-1}^{+1}\left[P_{i+1}-\frac{2}{i(i+1)}P'_i\right]\left[P_{k+1}-\frac{2}{k(k+1)}P'_k\right]dx=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Пользуясь (6), вычислим интегралы

$$I_1=\int_{-1}^{+1}P_{i+1}P_{k+1}\,dx=\int_{-1}^{+1}P_{2s+1}P_{2r+1}\,dx=0.$$

Так как $r>s$,

$$I_2=\frac{-2}{i(i+1)}\int_{-1}^{+1}P'_iP_{k+1}\,dx=\frac{-2}{2s(2s+1)}\int_{-1}^{+1}P'_{2s}P_{2r+1}\,dx=$$

$$=\frac{-2}{2s(2s+1)}\int_{-1}^{+1}\sum_{\nu=1}^{s}(4\nu-1)P_{2\nu-1}P_{2r+1}\,dx=0,$$

потому что $2\nu - 1 < 2r + 1$; $\nu = 1, 2, 3, \ldots, s$; $r > s$;

$$I_3 = \frac{-2}{k(k+1)} \int_{-1}^{+1} P'_k P_{i-1} dx = \frac{-2}{2r(2r+1)} \int_{-1}^{+1} P'_{2r} P_{2s+1} dx =$$

$$= \frac{-2}{2r(2r+1)} \int_{-1}^{+1} \sum_{\nu=1}^{r} (4\nu - 1) P_{2\nu-1} P_{2s+1} dx.$$

Если $r > s$, то рассматриваемые полиномы совпадают лишь при $2\nu - 1 = 2s + 1$, т. е. при $\nu = s + 1$.
Поэтому

$$I_3 = \frac{-2}{r(2r+1)} \int_{-1}^{+1} (4s+3) P^2_{2s+1} dx = \frac{-2}{r(2r+1)};$$

$$I_4 = \frac{2}{i(i+1)} \cdot \frac{2}{k(k+1)} \int_{-1}^{+1} P'_i P'_k dx =$$

$$= \frac{2}{2s(2s+1)} \cdot \frac{2}{2r(2r+1)} \int_{-1}^{+1} \sum_{\nu=1}^{s} (4\nu - 1) P_{2\nu-1} \sum_{\mu=1}^{r} (4\mu - 1) P_{2\mu-1} dx =$$

$$= \frac{1}{sr(2s+1)(2r+1)} \int_{-1}^{+1} \sum_{\nu=1}^{s} (4\nu - 1)^2 P^2_{2\nu-1} dx =$$

$$= \frac{1}{s.r(2s+1)(2r+1)} \sum_{\nu=1}^{s} (4\nu - 1)^2 \frac{2}{4\nu - 1} = \frac{2}{r(2r+1)}.$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{-2}{r(2r+1)} + \frac{2}{r(2r+1)} = 0.$$

2. i и k нечетные.
Пусть $i = 2s + 1$; $k = 2r + 1$; $r > s$,

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = \int_{-1}^{+1} \left[P_{i+1} - \frac{2}{i(i+1)} P'_i \right] \left[P_{k+1} - \frac{2}{k(k+1)} P'_k \right] dx =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

так как

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} P_{k+1} P_{i+1} dx = 0,$$

$$I_2 = \frac{-2}{k(k+1)} \int_{-1}^{+1} P_{i+1} P'_{k+1} dx = \frac{-2}{(2r+1)(2s+1)} \int_{-1}^{+1} P_{2s+2} \sum_{\nu=0}^{r} (4\nu + 1) P_{2\nu} dx.$$

Все слагаемые обращаются в нули, кроме слагаемого, соответствующего индексу $2\nu = 2s + 2$,

$$I_2 = \frac{-1}{(r+1)(2r+1)} \int_{-1}^{+1} (4s+5) P_{2s+2}^2 dx = \frac{-2}{(r+1)(2r+1)},$$

$$I_3 = \frac{-2}{k(k+1)} \int_{-1}^{+1} P_i' P_{k+1} dx = \frac{-1}{(2s+1)(s+1)} \int_{-1}^{+1} P_{2r+2} \sum_{\nu=0}^{s} (4\nu+1) P_{2\nu} dx = 0,$$

$$I_4 = \frac{4}{i(i+1)(k+1)k} \int_{-1}^{+1} P_i' P_k' dx =$$

$$= \frac{1}{(2s+1)(2r+1)(s+1)(r+1)} \int_{-1}^{+1} \sum_{\nu=0}^{s} (4\nu+1) P_{2\nu} \sum_{\mu=0}^{r} (4\mu+1) P_{2\mu} dx =$$

$$= \frac{1}{(2s+1)(2r+1)(s+1)(r+1)} \int_{-1}^{+1} \sum_{\nu=0}^{s} (4\nu+1)^2 P_{2\nu}^2 dx = \frac{2}{(2r+1)(r+1)}.$$

3. i — четное, k — нечетное.

Очевидно, что

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_i(x) \varphi_k(x)\, dx = 0.$$

Следовательно, система функций (5) ортогональна.

Заметим, что

$$\varphi_n(\pm 1) = 0.$$

Применим наши функции к решению дифференциального уравнения

$$y'' + k^2 y = 0, \tag{8}$$

описывающего упругую линию колеблющейся однородной струны. Пусть струна имеет длину 2 и закреплена на концах, тогда основной тон струны дается решением

$$y = a \cos kx; \;\; k = \frac{\pi}{2}.$$

Для приближенного определения частот колебания струны Ритц задается последовательностью полиномов

$$y_n = (1 - x^2)(a_0 + a_1 x^2 + \ldots + a_n x^{2n}), \tag{9}$$

где

$$y_n = \varphi_1^* + \varphi_2^* + \ldots + \varphi_n^*,$$

т. е.

$$\varphi_1^* = a_0(1 - x^2);\; \varphi_2^* = a_1(1 - x^2)x^2; \ldots; \varphi_n^* = a_{n-1}(1 - x^2)x^{2(n-1)}.$$

Графики функций $\varphi_1^*(x)$ и $\varphi_2^*(x)$ представлены на рис. 1.

Графики функций, соответствующие точному решению задачи

$$\varphi_1(x) = \cos\frac{\pi x}{2};\; \varphi_2(x) = \cos\frac{3\pi x}{2};\; \varphi_3(x) = \cos\frac{5\pi x}{2},$$

представлены на рис. 2.

Если сравнить графики функций, полученных нами (рис. 3), и графики функций, указанных Ритцем, $\varphi_1^*(x)$, $\varphi_2^*(x)$ ... (см. рис. 1), с графиками функций, соответствующих точному решению (см. рис. 2), то видно, что функции (5) хорошо описывают формы колебаний струны, тогда как функции Ритца не имеют соответствующих узлов.

Если решить дифференциальное уравнение (8) приближенно методом Галеркина, задав y двумя членами ряда в виде

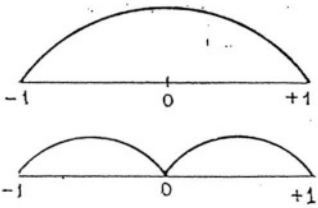

Рис. 1.

$$y = a_1\varphi_1(x) + a_3\varphi_3(x),$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_3(x)$ — функции (5), то определитель частот будет иметь следующий вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{12}{5}k^2 - 6, & -1 \\ -1, & \frac{5}{9}k^2 - \frac{85}{6} \end{vmatrix} = 0. \qquad (10)$$

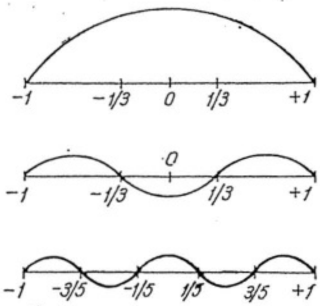

Рис. 2.

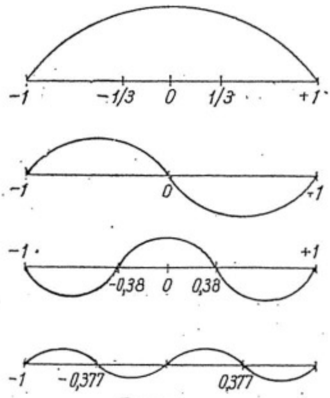

Рис. 3.

Если задать y тремя членами ряда, то определитель примет следующий вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{12}{5}k^2 - 6, & -1, & -\frac{2}{5} \\ -1, & \frac{5}{9}k^2 - \frac{85}{6}, & -\frac{17}{5} \\ -\frac{2}{5}, & -\frac{17}{5}, & \frac{56}{195}k^2 - \frac{308}{15} \end{vmatrix} = 0. \qquad (11)$$

При решении уравнения (8) при помощи ряда (9) определитель частот имеет вид [1]

$$\Delta = \begin{vmatrix} 35 - 14k^2, & 7 - 2k^2 \\ 21 - 6k^2, & 33 - 2k^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

В определителе (12), полученном при приближенном решении уравнений (8) с помощью неортогональной системы функций, частоты расположены во всех членах определителя, а в определителях (10) и (11), полученных при приближенном решении с помощью построенной нами ортогональной системы функций, частоты располагаются по одной диагонали определителя, что значительно облегчает вычисления и обеспечивает более высокую точность решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Смирнов, В. И. Крылов, Л. В. Канторович, Вариационные исчисления, Гостехиздат, М., 1948.

Поступила 23. V 1960 г.
Днепропетровск