Решение обратной задачи дифракции

Д. Я. Петрина

Задачу дифракции можно сформулировать следующим образом [1, 2]. В трехмерном пространстве E задана некоторая конечная область B с гладкой границей Σ. Ищется решение уравнений

$$\begin{aligned} \Delta u + k_1^2 u = 0, \qquad \bar{x} \in B, \\ \Delta u + k_0^2 u = 0, \qquad \bar{x} \in E - B, \end{aligned} \tag{1}$$

при следующих условиях сопряжения на границе Σ:

$$(u)_1 = (u)_0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_0 \tag{2}$$

(символы$(\ )_0$ и $(\ )_1$ обозначают предельное значение на границе Σ соответственно изнутри и извне). Числа k_0 и k_1 считаем действительными.

Решение ищется в виде суммы падающей волны $e^{i\bar{k}_0\bar{x}}$ ($\bar{k}_0 = k_0\bar{l}$, $\bar{l}$ — единичный вектор) и волны, возникающей в результате дифракции в области B и затухающей на бесконечности. Последнее требование приводит к так называемому условию излучения, которое можно записать в слудующем виде:

$$u(\bar{x}) - e^{i\bar{k}_0\bar{x}} = 0\left(\frac{1}{|\bar{x}|}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial|\bar{x}|}[u(\bar{x}) - e^{i\bar{k}_0\bar{x}}] - ik_0[u(\bar{x}) - e^{i\bar{k}_0\bar{x}}] = 0\left(\frac{1}{|\bar{x}|}\right). \tag{3}$$

Решение задачи (1), (2), (3) единственно [1, 2] и может быть представлено в следующем виде:

$$u(\bar{x}) = e^{i\bar{k}_0\bar{x}} - (k_0^2 - k_1^2)\int_B u(\bar{y})\,\frac{e^{ik_0|\bar{x}-\bar{y}|}}{4\pi|\bar{x}-\bar{y}|}\,d\bar{y}. \tag{4}$$

Из формулы (4) видно, что решение $u(\bar{x})$ при больших $\bar{x}$ имеет следующую асимптотику:

$$u(x) \approx e^{i\bar{k}_0\bar{x}} + \frac{e^{ik_0|\bar{x}|}}{|\bar{x}|} f(k_0, k_1, \bar{\tau}), \tag{5}$$

где функция $f(k_0, k_1, \bar{\tau})$ — амплитуда рассеяния; $\bar{\tau}$ — передаваемый импульс.

Обратную задачу дифракции можно сформулировать следующим образом:
определить область B по амплитуде рассеяния $f(k_0, k_1\,\bar{\tau})$.

Используя соотношение (5) получим следующее представление для амплитуды рассеяния [3]:

$$f(k_0, k_1, \bar{\tau}) = -\frac{k_0^2 - k_1^2}{4\pi}\int_B e^{i\bar{\tau}\bar{y}}\,d\bar{y} + \frac{(k_0^2 - k_1^2)^2}{4\pi}\int_B\int_B e^{i\bar{\tau}\frac{\bar{y}+\bar{z}}{2}} \times$$
$$\times R(k_0, k_1, \bar{y}, \bar{z})\, e^{i\left(k_0^2 - \frac{1}{4}\tau^2\right)^{\frac{1}{2}}\bar{n}(\bar{y}-\bar{z})}\, d\bar{y}d\bar{z}, \tag{6}$$

где $R(k_0, k_1, \bar{y}, \bar{z})$ — резольвентный оператор интегрального уравнения (4); вектор n перпендикулярный к вектору $\bar{\tau}$.

При действительных k_0 и k_1 резольвентный оператор существует [4]. Резольвентный оператор $R(k_0, k_1, \bar{y}, \bar{z})$ допускает аналитическое продолжение по k_0 в комплексную область при произвольном конечном комплексном k_1.

Это утверждение следует из того факта, что определитель и минор определителя Фредгольма являются аналитическими функциями k_0. В справедливости последнего утверждения легко убедиться, использовав конечность области B и вид ядра уравнения (4). Резольвентный оператор может иметь полюса по k_0, которые соответствуют нулям определителя Фредгольма.

Резольвентный оператор $R(k_0, k_1, \bar{z}, \bar{y})$ не имеет полюсов по k_0 в области $|(k_0^2 - k_1^2)| < c$, где c — достаточно малое число, определяемое областью B. Действительно, резольвентный оператор $R(k_0, k_1, \bar{z}, \bar{y})$ при достаточно малых $|(k_0^2 - k_1^2)|$ существует и является аналитической функцией k_0 в вышеуказанной области, так как ряд, определяющий резольвентный оператор, равномерно сходится относительно k_0 из области $|(k_0^2 - k_1^2)| < c$ в силу малости c.

Амплитуда рассеяния, определяемая формулой (6), также является аналитической функцией k_0 в комплексной плоскости с разрезом $\operatorname{Im} k_0 = 0$, $|\operatorname{Re} k_0| < \frac{1}{2}|\bar{\tau}|$ при произвольном конечном k_1 и фиксированном $\bar{\tau}$ (даже комплексном), так как интегралы (6) равномерно сходятся по k_0.

Из формулы (6) следует справедливость следующего соотношения:

$$\frac{\partial f(k_0, k_1, \bar{\tau})}{\partial k_0^2}\Big|_{k_0^2=k_1^2} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_B e^{i\bar{\tau}\bar{y}}d\bar{y}. \tag{7}$$

С помощью этой формулы можно решать обратную задачу дифракции. Действительно, формула (7) определяет преобразование Фурье характеристической функции области B через амплитуду рассеяния.

Из формулы (7) следует, что для определения области B нужно знать $\frac{\partial f(k_0, k_1, \bar{\tau})}{\partial k_0^2}$ при $k_0^2 = k_1^2$ и при всех действительных $\bar{\tau}$. Из эксперимента амплитуда рассеяния определяется только при $k_0^2 \neq k_1^2$, ибо в противном случае не было бы самого явления дифракции. Однако в силу того факта, что амплитуда рассеяния является аналитической по k_0 в области, включающей точку $k_0^2 = k_1^2$, можно продолжить амплитуду рассеяния из области $k_0^2 \neq k_1^2$ в точку $k_0^2 = k_1^2$ и определить в этой точке $\frac{\partial f(k_0, k_1, \bar{\tau})}{\partial k^2}$.

Из формулы (7) следует также единственность решения обратной задачи дифракции.

Формула (7) интересна еще в следующем отношении. Если для восстановления потенциала для уравнения Шредингера [5, 6] нужно было знать амплитуду рассеяния при больших энергиях, то в случае дифракции нужно знать амплитуду рассеяния (точнее ее производную по k_0^2) в «нефизической» точке $k_0^2 = k_1^2$, т. е. при тех значениях параметров k_0 и k_1, при которых не протекает само явление дифракции. Для определения амплитуды рассеяния в этой точке используется возможность аналитического продолжения амплитуды в «нефизическую» точку $k_0^2 = k_1^2$.

В случае дифракции на шаре радиуса R задача (1), (2), (3) допускает точное решение [1].

Амплитуда рассеяния зависит в этом случае только от $|\bar{\tau}|$ или от $\cos\theta = 1 - \frac{\bar{\tau}^2}{2k_0^2}$ и может быть представлена в следующем виде:

$$f(k_0, k_1, \cos\theta) = \frac{1}{k_0}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)(-1)^m c_m P_m(-\cos\theta), \tag{8}$$

где

$$c_m = -\frac{k_1 J_{m+\frac{1}{2}}(k_0R)\,J'_{m+\frac{1}{2}}(k_1R) - k_0 J'_{m+\frac{1}{2}}(k_0R)\,J_{m+\frac{1}{2}}(k_1R)}{e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}\left\{k_1 J_{m+\frac{1}{2}}(k_0R)\,J'_{m+\frac{1}{2}}(k_1R) - k_0 J'_{m+\frac{1}{2}}(k_0R)\,J_{m+\frac{1}{2}}(k_1R)\right\} - \left\{k_0 J_{m+\frac{1}{2}}(k_1R)\,J'_{-\left(m+\frac{1}{2}\right)}(k_0R) - k_1 J'_{m+\frac{1}{2}}(k_1R)\,J_{-\left(m+\frac{1}{2}\right)}(k_0R)\right\}}; \tag{9}$$

$J_{\left(m+\frac{1}{2}\right)}$, $J_{-\left(m+\frac{1}{2}\right)}$ — функции Бесселя; P_m — полиномы Лежандра.

Формулу (8) можно представить в следующем виде [7]:

$$f(k_0, k_1, \cos\theta) = -\frac{1}{k_0}\oint\frac{2m+1}{2i\sin\pi m}c_m P_m(-\cos\theta)\,dm, \tag{10}$$

где интегрирование ведется по контуру, охватывающему положительную действительную ось и оставляющему все комплексные полюсы вне контура

С помощью формулы (10) можно осуществить аналитическое продолжение амплитуды рассеяния по $\cos\theta$ в комплексную плоскость.

Подынтегральная функция в формуле (10) является аналитической по $\cos\theta$ всюду, кроме разреза $\mathrm{Im}\cos\theta = 0$, $\mathrm{Re}\cos\theta \geqslant 1$. Учитывая асимптотику $J_{m+\frac{1}{2}}$ и $J_{-(m+\frac{1}{2})}$, можно показать, что интеграл (10) сходится равномерно относительно $\cos\theta$ из плоскости с вышеуказанным разрезом. Поэтому и амплитуда рассеяния $f(k_0, k_1\cos\theta)$ будет аналитической по $\cos\theta$ в комплексной плоскости с разрезом. Это утверждение также вытекает из формулы (6).

В случае дифракции на шаре, для восстановления формы области B, т. е. для определения радиуса шара R, достаточно знать величину $\left.\frac{\partial f(k_0, k_1\bar{\tau})}{\partial k_0^2}\right|_{k_0^2=k_1^2}$ в точке $\bar{\tau}=0$, а не при всех $\bar{\tau}$. Радиус R определится из формулы

$$\left.\frac{\partial f(k_0, k_1, 0)}{\partial k_0^2}\right|_{k_0^2=k_1^2} = -\frac{1}{3}R^3. \tag{11}$$

В этом случае для решения обратной задачи дифракции достаточно знать амплитуду рассеяния при рассеянии вперед.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
2. В. Д. Купрадзе. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
3. Д. Я. Петрина, Укр. матем. журн., 10, 405, 1958.
4. А. Я. Повзнер, Матем. сборник, 32, 109, 1953.
5. Ю. М. Березанский, Труды Москов. матем. об-ва, 7, 3, 1958.
6. Л. Д. Фаддеев, Вестник ЛГУ, 7, 126, 1956.
7. А. Зоммерфельд, Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, М., 1950.

Поступила 13. IV 1960 г.
Киев