Одно обобщение теоремы Хаага

В. П. Гачок

1. Вступление

Недавно Гринбергом [1] дано доказательство теоремы Хаага [2, 3] для общего случая. Существенным в этой теореме было то, что любая релятивистская теория поля, которая для данного фиксированного времени связана унитарным преобразованием со свободной теорией поля, полностью эквивалентна этой теории во всем четырехмерном пространстве. В работе Гринберга [1] ставится задача о рассмотрении другой системы аксиом. В настоящей заметке для этой системы аксиом доказывается теорема, аналогичная теореме Хаага. Существенным в этой теореме является условие локальной коммутативности и условие $A(x)\Psi_0 = A^{\mathrm{in}}(x)\Psi_0$. Мы ограничиваемся рассмотрением нейтрального скалярного поля.

2. Формулировка условий теоремы

Рассматривается релятивистская теория поля, которая основывается на следующих аксиомах.

I. Инвариантность относительно неоднородной группы Лоренца.

II. Существует единственное нормализованное инвариантное вакуумное состояние Ψ_0 и не существует состояний с отрицательной энергией.

III. Локальная коммутативность:

$$[A(x), A(y)] = 0, \text{ когда } (x-y)^2 < 0.$$

IV. Условие Гринберга [1]:

$$A(x)\Psi_0 = A^{\mathrm{in,\,out}}(x)\Psi_0, \tag{1}$$

где

$$A^{\mathrm{in}}(x) = A(x) + \int \Delta_R(x-x')\, j(x')\, dx'. \tag{2}$$

С оператором тока

$$j(x) = (\Box - m^2)\, A(x). \tag{3}$$

Соотношение (2) понимается в том смысле [7], [8], что

$$(\Phi, A^{\mathrm{in}}(x)\Psi_0) = (\Phi, A(x)\Psi) + \int \Delta_R(x-x')\,(\Phi, j(x')\Psi)\, dx'$$

для любых нормализованных состояний векторов Φ и Ψ. Как следствие определения (2), оператор $A^{\mathrm{in}}(x)$ является решением уравнения Клейна — Гордона с массой m

$$(\Box - m^2)\, A^{\mathrm{in}}(x) = 0. \tag{4}$$

Все вышеприведенные соотношения можно выписать и для оператора $A^{\text{out}}(x)$. Непосредственно из определения (1) вытекает равенство

$$j(x)\,\Psi_0 = 0. \tag{5}$$

Отметим еще, что оператор $A^{\text{in}}(x)$ обладает инвариантными свойствами

$$U(a, \Lambda)\, A^{\text{in}}(x) U^{-1}(a, \Lambda) = A^{\text{in}}(\Lambda x + a), \tag{6}$$

где $U(a, \Lambda)$ — унитарный оператор, преобразующий $A^{\text{in}}(x)$ в $A^{\text{in}}(\Lambda x + a)$, Λ — ортохронная группа Лоренца, a — вектор пространственно-временной трансляции, и имеет место соотношение

$$[A^{\text{in}}(x),\ A^{\text{in}}(y)] = \frac{1}{i}\Delta(x - y). \tag{7}$$

3. Доказательство теоремы

Имеет место следующая

Т е о р е м а. *Любая релятивистская теория поля, включающая I—IV аксиомы, эквивалентна свободной теории поля.*

Для иллюстрации метода доказательства рассмотрим подробно вакуумное ожидание от произведения трех операторов. При помощи (2) составим выражение

$$\begin{aligned}
(\Psi_0, A(x_1)\, A(x_2)\, A(x_3)\,\Psi_0) &= (\Psi_0, A^{\text{in}}(x_1), A^{\text{in}}(x_2)\, A^{\text{in}}(x_3)\Psi_0) - \\
&- \int \Delta_R\,(x_1 - x_1')\, dx_1'\, (\Psi_0, j(x_1')\, A^{\text{in}}(x_2)\, A^{\text{in}}(x_3)\Psi_0) - \\
&- \int \Delta_R\,(x_2 - x_2')\, dx_2'\, (\Psi_0, A^{\text{in}}(x_1), j(x_2')\, A^{\text{in}}(x_3)\,\Psi_0) - \\
&- \int \Delta_R(x_3 - x_3')\, dx_3'\, (\Psi_0, A^{\text{in}}(x_1), A^{\text{in}}(x_2)\, j(x_3')\,\Psi_0) + \\
&+ \iint \Delta_R\,(x_2 - x_2')\,\Delta_R(x_3 - x_3')\, dx_2'\, dx_3'\, (\Psi_0, A^{\text{in}}(x_1)\, j(x_2')\, j(x_3')\,\Psi_0) + \\
&+ \iint \Delta_R(x_1 - x_1')\,\Delta_R(x_3 - x_3')\, dx_1'\, dx_3'\, (\Psi_0, j(x_1')\, A^{\text{in}}(x_2)\, j(x_3')\,\Psi_0) + \\
&+ \iint \Delta_R\,(x_1 - x_1')\,\Delta_R\,(x_2 - x_2')\, dx_1'\, dx_2'\, (\Psi_0, j(x_1')\, j(x_2')\, A^{\text{in}}(x_3)\,\Psi_0) - \\
&- \iiint \Delta_R(x_1 - x_1')\,\Delta_R\,(x_2 - x_2')\,\Delta_R\,(x_3 - x_3')\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3'\, (\Psi_0, j(x_1')\, j(x_2') j(x_3')\Psi_0).
\end{aligned} \tag{8}$$

В силу равенства (5) четвертое, пятое, шестое и восьмое слагаемые в (8) исчезают.

Докажем, что все оставшиеся слагаемые в (8) исчезают за исключением первого. Рассмотрим одно из них

$$\int \Delta_R\,(x_2 - x_2')\, dx_2'\, (\Psi_0, A^{\text{in}}(x_1)\, j(x_2')\, A^{\text{in}}(x_3)\,\Psi_0). \tag{9}$$

Для нашей цели достаточно доказать, что

$$(\Psi_0, A^{\text{in}}(x_1)\, j(x_2')\, A^{\text{in}}(x_3)\,\Psi_0) = 0 \tag{10}$$

во всем пространстве действительных переменных $x_1,\ x_2',\ x_3$.

Используя еще раз определение (2), найдем

$$\begin{aligned}
(\Psi_0, A^{\text{in}}(x_1)\, j(x_2')\, A^{\text{in}}(x_3)\,\Psi_0) &= (\Psi_0, A(x_1)\, j(x_2')\, A(x_3)\,\Psi_0) + \\
&+ \int \Delta_R\,(x_1 - x_1')\, dx_1'\, (\Psi_0, j(x_1') j(x_2')\, A(x_3)\,\Psi_0) +
\end{aligned}$$

$$+\int \Delta_R(x_3-x_3')\,dx_3'\,(\Psi_0, A(x_1)\,j(x_2')\,j(x_3')\,\Psi_0)+$$

$$+\iint \Delta_R(x_1-x_1')\,\Delta_R(x_3-x_3')\,dx_1'\,dx_3'\,(\Psi_0, j(x_1')\,j(x_2')\,j(x_3')\,\Psi_0). \qquad (11)$$

Два последние слагаемые в этом выражении равны нулю в силу (5).

Рассмотрим функцию

$$F_1(x_1-x_2', x_2'-x_3)=(\Psi_0, A(x_1)\,j(x_2')\,A(x_3)\,\Psi_0). \qquad (12)$$

В силу известной теоремы Вайтмана [4, 3, 5] функция $F_1(x_1-x_2', x_2'-x_3)$ является граничным значением аналитической функции двух комплексных векторов $x_1-x_2-i\eta$ и $x_2'-x_3-i\eta'$, где η и η' изменяются независимо в верхнем световом конусе. Эта аналитическая функция зависит только от следующих трех инвариантов Лоренца [5]:

$$z_1=(x_1-x_2'-i\eta)^2,$$

$$z_2=(x_2'-x_3-i\eta')^2,$$

$$z_3=[x_1-x_3-i(\eta+\eta')]^2. \qquad (13)$$

Обозначим эту функцию через $F_1(z_1, z_2, z_3)$.

Рассмотрим теперь другую функцию

$$F_2(x_1-x_3, x_3-x_2')=(\Psi_0, A(x_1)\,A(x_3)\,j(x_2')\,\Psi_0). \qquad (14)$$

Она также является граничным значением некоторой аналитической функции $F_2(z_1, z_2, z_3)$, где

$$z_1=(x_1-x_3-i\eta)^2,$$

$$z_2=(x_3-x_2-i\eta')^2, \qquad (15)$$

$$z_3=[x_1-x_2'-i(\eta+\eta')]^2.$$

В силу локальной коммутативности граничные значения функций $F_1(z_1, z_2, z_3)$ и $F_2(z_1, z_2, z_3)$ совпадают в некоторой действительной области. Как можно увидеть непосредственно из (13) и (15), эта область лежит внутри областей аналитичности функций $F_1(z_1, z_2, z_3)$ и $F_2(z_1, z_2, z_3)$. Из этого заключаем, что функции F_1 и F_2 совпадают везде, где только они определены. Таким образом, мы приходим к выводу, что обе функции $F_1(x_1-x_2', x_2'-x_3)$ и $F_2(x_1-x_3, x_3-x_2')$ являются граничными величинами одной и той же аналитической функции $F(z_1, z_2, z_3)$. Заметим еще, что из функции $F(z_1, z_2, z_3)$ мы можем получить оба граничные значения (12) и (14), определенным образом выбирая граничные значения, в соответствии с (13) и (15). В силу равенства (5) функция $F_2(x_1-x_3, x_3-x_2')$ исчезает во всем пространстве переменных x_1, x_2', x_3. Следовательно, и ее аналитическое продолжение $F(z_1, z_2, z_3)$ исчезает во всем комплексном пространстве переменных z_1, z_2, z_3. Отсюда сразу следует, что функция $F_1(x_1-x_2', x_2'-x_3)$ равна нулю во всем пространстве переменных x_1, x_2', x_3, ибо она является граничным значением функции $F(z_1, z_2, z_3)$.

Второе слагаемое в выражении (11) также исчезает в силу приведенных выше рассуждений. Таким образом, соотношение (10) установлено.

Осталось рассмотреть второе и седьмое слагаемые в (8).

Докажем, что имеют место равенства

$$(\Psi_0, j(x_1') A^{\rm in}(x_2) A^{\rm in}(x_3) \Psi_0) = 0, \tag{16}$$

$$(\Psi_0, j(x_1') j(x_2') A^{\rm in}(x_3) \Psi_0) = 0 \tag{17}$$

во всем пространстве действительных переменных x_1', x_2, x_3 и x_1', x_2', x_3, соответственно. С помощью формулы (2) для этих двух вакуумных средних можем выписать соотношения

$$\begin{aligned}(\Psi_0, j(x_1') A^{\rm in}(x_2) A^{\rm in}(x_3) \Psi_0) &= (\Psi_0, j(x_1') A(x_2) A(x_3) \Psi_0) + \\ &+ \int \Delta_R(x_2 - x_2')\, dx_2' (\Psi_0, j(x_1') j(x_2') A(x_3) \Psi_0) + \\ &+ \int \Delta_R(x_3 - x_3')\, dx_3' (\Psi_0, j(x_1') A(x_2) j(x_3') \Psi_0) + \\ &+ \iint \Delta_R(x_2 - x_2') \Delta_R(x_3 - x_3')\, dx_2'\, dx_3' (\Psi_0, j(x_1') j(x_2') j(x_3') \Psi_0),\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}(\Psi_0, j(x_1') j(x_2') A^{\rm in}(x_3) \Psi_0) &= (\Psi_0, j(x_1') j(x_2') A(x_3) \Psi_0) + \\ &+ \int \Delta_R(x_3 - x_3')\, dx_3' (\Psi_0, j(x_1') j(x_2') j(x_3') \Psi_0).\end{aligned} \tag{19}$$

Принимая во внимание равенство (5), видим, что третье и четвертое слагаемые в (18) и второе слагаемое в (19) исчезают.

В силу условия локальной коммутативности имеют место равенства

$$(\Psi_0, j(x_1') A(x_2) A(x_3) \Psi_0) = (\Psi_0, A(x_2) A(x_3) j(x_1') \Psi_0) \tag{20}$$

для $(x_1' - x_2)^2 < 0$ и $(x_1' - x_3)^2 < 0$,

$$(\Psi_0, j(x_1') j(x_2') A(x_3) \Psi_0) = (\Psi_0, j(x_1') A(x_3) j(x_2') \Psi_0) \tag{21}$$

для $(x_2' - x_3)^2 < 0$.

Заметим, что в силу (5) правые части (20) и (21) исчезают. Используя снова теорему Вайтмана [4] по аналогии с (12)—(15), приходим к заключению, что равенства (16), (17) имеют место.

Этим мы показали, что все слагаемые в (8), за исключением первого, исчезают. Следовательно, имеет место соотношение

$$(\Psi_0, A(x_1) A(x_2) A(x_3) \Psi_0) = (\Psi_0, A^{\rm in}(x_1) A^{\rm in}(x_2) A^{\rm in}(x_3) \Psi_0). \tag{22}$$

Сделаем теперь следующее замечание. Пусть оператор $A_0(x)$ описывает свободное поле. Он удовлетворяет соотношениям (4), (6) и (7). Этим же соотношениям удовлетворяет и оператор $A^{\rm in}(x)$. Тогда, следуя Вайтману [6], существует унитарное преобразование V такое, что

$$A^{\rm in}(x) = V A_0(x) V^{-1} \quad \text{и} \quad V\Psi_0 = \Psi_0. \tag{23}$$

Используя (23), находим

$$\begin{aligned}&(\Psi_0, A^{\rm in}(x_1) A^{\rm in}(x_2) A^{\rm in}(x_3) \Psi_0) = \\ &= (\Psi_0, V A_0(x_1) V^{-1} V A_0(x_2) V^{-1} V A_0(x_3) V^{-1} \Psi_0) = \\ &= (\Psi_0, A_0(x_1) A_0(x_2) A_0(x_3) \Psi_0).\end{aligned} \tag{24}$$

Этим мы установили равенство

$$(\Psi_0, A(x_1) A(x_2) A(x_3) \Psi_0) = (\Psi_0, A_0(x_1) A_0(x_2) A_0(x_3) \Psi_0). \tag{25}$$

Докажем, что имеет место аналогичное равенство и в общем случае.

Для этого составим с помощью (2) выражение

$$(\Psi_0, A(x_1) \ldots A(x_n) \Psi_0) = (\Psi_0, A^{\text{in}}(x_1) \ldots A^{\text{in}}(x_n) \Psi_0) + \Sigma + \Sigma'. \tag{26}$$

Через Σ' обозначены все слагаемые, которые содержат вакуумные средние от произведения n операторов, причем на n-ом месте стоит оператор тока $j(x_n')$, то есть вакуумные средние вида $(\Psi_0, \ldots j(x_n') \Psi_0)$. Все такие вакуумные средние в силу (5) исчезают. Следовательно, исчезает и Σ'.

Все оставшиеся слагаемые в (26), за исключением первого, обозначены через Σ. Докажем, что $\Sigma = 0$, Для этого рассмотрим одно из слагаемых, входящих в Σ, например,

$$\int \Delta_R(x_i - x_i')\, dx_i' (\Psi_0, A^{\text{in}}(x_1) \ldots j(x_i') A^{\text{in}}(x_{i+1}) \ldots A^{\text{in}}(x_n) \Psi_0). \tag{27}$$

Докажем, что имеет место равенство

$$(\Psi_0, A^{\text{in}}(x_1) \ldots j(x_i') A^{\text{in}}(x_{i+1}) \ldots A^{\text{in}}(x_n) \Psi_0) = 0 \tag{28}$$

во всем пространстве действительных переменных $x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n$. Используя (2), находим соотношение

$$\begin{aligned}
&(\Psi_0, A^{\text{in}}(x_1) \ldots j(x_i') A^{\text{in}}(x_{i+1}) \ldots A^{\text{in}}(x_n) \Psi_0) = \\
&= (\Psi_0, A(x_1) \ldots j(x_i') A(x_{i+1}) \ldots A(x_n) \Psi_0) + \\
&+ \int \Delta_R(x_1 - x_1')\, dx_1' (\Psi_0, j(x_1') \ldots j(x_i') A(x_{i+1}) \ldots A(x_n) \Psi_0) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \int \Delta_R(x_n - x_n')\, dx_n' (\Psi_0, A(x_1) \ldots j(x_i') A(x_{i+1}) \ldots j(x_n') \Psi_0) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \int\int \ldots \int \Delta_R(x_1 - x_1') \ldots \Delta_R(x_n - x_n')\, dx_1' \ldots dx_n' \times \\
&\times (\Psi_0, j(x_1') \ldots j(x_i') \ldots j(x_n') \Psi_0) = S + S'.
\end{aligned} \tag{29}$$

Через S' обозначены все слагаемые, содержащие вакуумные средние, в которых на n-ом месте стоит оператор тока $j(x_n')$, то есть вакуумные средние вида $(\Psi_0, \ldots j(x_i') \ldots j(x_n') \Psi_0)$. В силу (5) все такие слагаемые равны нулю. Все оставшиеся слагаемые обозначены через S. Докажем, что все они также исчезают.

Рассмотрим одно из них

$$\int \Delta_R(x_1 - x_1')\, dx_1' (\Psi_0, j(x_1') \ldots j(x_i') A(x_{i+1}) \ldots A(x_n) \Psi_0). \tag{30}$$

Для нашей цели достаточно доказать, что

$$(\Psi_0, j(x_1') \ldots j(x_i') A(x_{i+1}) \ldots A(x_n) \Psi_0) = 0 \tag{31}$$

во всем пространстве действительных переменных $x_1', \ldots, x_i', \ldots, x_n$.

В силу условия локальной коммутативности имеет место равенство

$$\begin{aligned}
&(\Psi_0, j(x_1') \ldots j(x_i') A(x_{i+1}) \ldots A(x_n) \Psi_0) = \\
&= (\Psi_0, j(x_1') \ldots A(x_{i+1}) \ldots A(x_n) j(x_i') \Psi_0),
\end{aligned} \tag{32}$$

если $(x_i' - x_{i+1})^2 < 0, \ldots, (x_i' - x_n)^2 < 0$.

Подобно случаю $n = 3$ воспользуемся теоремой Вайтмана [4], которая имеет место и в общем случае. В силу этой теоремы и условия локальной коммутативности, оба вакуумные средние, входящие в (32), будут являться граничными значениями одной и той же аналитической функции $F(z_1, z_2, \ldots, z_N)$ комплексных переменных $z_1, z_2, \ldots, z_N$. Функция, стоящая в правой части (32), исчезает во всем пространстве действительных переменных $x_1', \ldots, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n$ в силу (5). Поэтому и ее аналитическое продолжение $F(z_1, z_2, \ldots, z_N) = 0$ во всем комплексном пространстве переменных $z_1, z_2, \ldots, z_N$. Это означает, что (31) доказано.

Аналогичным образом можно показать, что все слагаемые, входящие в S, также исчезают. Следовательно, равенство (28) имеет место. Подобные рассуждения можно провести и для всех остальных слагаемых, входящих в Σ.

Таким образом, все слагаемые, за исключением первого, в (26) исчезают. Это приводит к равенству

$$(\Psi_0, A(x_1) \ldots A(x_n) \Psi_0) = (\Psi_0, A^{\mathrm{in}}(x_1) \ldots A^{\mathrm{in}}(x_n) \Psi_0). \tag{33}$$

С помощью (23) находим

$$\begin{aligned} &(\Psi_0, A^{\mathrm{in}}(x_1) A^{\mathrm{in}}(x_2) \ldots A^{\mathrm{in}}(x_n) \Psi_0) = \\ &= (\Psi_0, VA_0(x_1) V^{-1} VA_0(x_2) V^{-1} \ldots VA_0(x_n) V^{-1} \Psi_0) = \\ &= \Psi_0, A_0(x_1) A_0(x_2) \ldots A_0(x_n) \Psi_0). \end{aligned} \tag{34}$$

Этим мы доказали, что все вакуумные средние теории поля, которая включает I—IV аксиомы, совпадают с вакуумными средними свободной теории поля.

В силу теоремы Вайтмана (4), такие теории полностью эквивалентны. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. W. Greenberg, Phys. Rev., 115, 706, 1959.
2. R. Haag, Dan. Mat. Fys. Medd., 29, № 12, 1955.
3. D. W. Kall and A. S. Wightman, Dan. Mat. Fys Medd., 31, № 5, 1957.
4. A. S Wightman, Phys. Rev., 101, 860, 1956.
5. G. Källen and A. S. Wightman, Dan. Mat. Fys. Medd., I, № 6, 1958.
6. A. S. Wightman, Доклад на Международной конференции по физике высоких энергий, Киев, 1959.
7. Lehman, Symanzik and Zimmermann, Nuovo Cimento, I, 205..1955.
8. W. Zimmermann, Nuovo Cimento, X, № 4, 1958.

Поступила 4. III 1960 г.
Киев

A generalization of Haag's theorem

V. P. Hachok

Summary

An analogue of Haag's theorem is proved for the case of a neutral scalar field. The vacuum expectation apparatus developed by A. Wightman and G. Källen is used for the proof.