Об одной задаче Г. Борга

К. Р. Коваленко

В первой заметке своей статьи 1951 г. Г. Борг [1] рассматривает дифференциальную систему

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + LY = F(t)\,Y, \tag{1}$$

где Y — n-мерный вектор-столбец $\{y_i\}_1^n$, $F(t)$ — непрерывная симметрическая вещественная периодическая матрица-функция $F(t + 2\pi) = F(t)$, а L — постоянная диагональная матрица

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

с положительными элементами, причем

$$\sqrt{\lambda_\nu} \not\equiv \sqrt{\lambda_\mu} \pmod 1 \quad (\nu \neq \mu). \tag{2}$$

Вводя для матрицы $F(t)$ ту или иную норму, Г. Борг ставит вопрос об определении возможно более точной оценки для выбранной нормы матрицы возмущения $F(t)$, обеспечивающей ограниченность всех решений уравнений (1).

Заметим, что этот вопрос имеет значение в линейной теории параметрического возбуждения колебаний консервативной механической системы.

Поясним, откуда появилось у Г. Борга условие (2). Согласно известной теореме Пуанкаре—Ляпунова, характеристическое уравнение системы уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + P(t)Y = 0, \tag{3}$$

где $P(t) = \| p_{jk} \|_1^n$ — симметрическая вещественная периодическая матрица-функция, является возвратным. Поэтому его корни располагаются симметрично относительно вещественной оси и единичной окружности. Корни $\varrho_j (j = 1, 2, \ldots, 2n)$ характеристического уравнения называются мультипликаторами системы уравнений (3). Каждому мультипликатору ϱ_j отвечает всегда нетривиальное решение Y_j системы уравнений (3) такое, что

$$Y_j(t + 2\pi) = \varrho_j Y_j(t). \tag{4}$$

Если все мультипликаторы различны и лежат на единичной окружности, то все решения системы (3) ограничены.

Легко видеть, что у невозмущенной системы

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + LY = 0 \tag{5}$$

мультипликаторами будут числа $\varrho_j = \pm e^{2\pi \sqrt{\lambda_j}\, i}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ Смысл условия (2) заключается в том, что при его выполнении все мультипликаторы ϱ_j системы (5) различны. При малом возмущении системы (5), получающемся, например, заменой в системе (1) матрицы $F(t)$ на $\varepsilon F(t)$, где ε непрерывно возрастает от 0 до 1, мультипликаторы будут двигаться по единичной окружности. Если при этом не произойдет слияния каких-либо мультипликаторов, то, в силу теоремы Пуанкаре-Ляпунова, ни один мультипликатор не сможет соскочить с единичной окружности и, следовательно, решения системы (1) все время будут оставаться ограниченными.

Все признаки ограниченности решений системы (1), полученные Г. Боргом, построены на идее нахождения условия «малости» $F(t)$, исключающей возможность встречи мультипликаторов при описанном выше их движении. В частности, беря в качестве нормы $F(t)$ величину

$$M_F = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \max_X \frac{\| F(t) X \|}{\| X \|}, \quad X = \{x_\nu\}_1^n, \quad \| X \|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2,$$

Г. Борг показывает, что решения уравнения (1) будут ограничены при выполнении условия

$$M_F < \min \max_{\alpha} \{\min_{m, \lambda_\nu} |(\alpha + m)^2 - \lambda_\nu|\}. \tag{6}$$

По-видимому, при опубликовании этой работы Г. Боргу еще не была известна заметка М. Г. Крейна [2]. В этой заметке и последующих работах [3, 4] М. Г. Крейн развил теорию мультипликаторов первого и второго рода, позволяющую на совсем другой, более широкой основе выводить признаки ограниченности всех решений системы (3) и, в частности, системы (1).

Приведем некоторые понятия и положения этой теории, ограничиваясь тем частным случаем систем (3), который имеет прямое отношение к задаче Г. Борга, а именно: предположим, что матрице $P(t)$ отвечает положительная квадратичная форма $(P(t)X, X)$. Некоторый мультипликатор ρ_j $(j=1, 2, \ldots, 2n)$ будет называться мультипликатором первого (второго) рода уравнения (3), если для всякого нетривиального, вообще говоря, комплексного решения системы (3), обладающего свойством (4), будет выполняться условие $\operatorname{Im}\left(Y, \frac{dY}{dt}\right) > 0$* (соответственно < 0). Так как для любого решения системы (3) $\frac{d}{dt}\left(Y, \frac{dY}{dt}\right) = \left(\frac{dY}{dt}, \frac{dY}{dt}\right) - (P(t)Y, Y)$ — вещественно, то $\operatorname{Im}\left(Y, \frac{dY}{dt}\right)$ не зависит от t.

Согласно основной теореме М. Г. Крейна, решения уравнения (1) будут устойчиво ограниченными, если каждый мультипликатор уравнения является мультипликатором первого или второго рода и, как показано в [5], только в этом случае. Эпитет «устойчиво ограниченные» означает, что ограниченность решений системы (3) сохраняется при замене периодической матрицы $P(t)$ любой другой периодической матрицей, достаточно близкой к $P(t)$.

Обозначим арифметические квадратные корни $\sqrt{\lambda_j}$ через ω_j. Легко видеть, что при выполнении условия

$$\omega_j + \omega_k \not\equiv 0 \pmod 1 \tag{7}$$

ни один из мультипликаторов $e^{2\pi\omega_j i}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ не будет совпадать ни с одним из мультипликаторов $e^{-2\pi\omega_k i}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, причем первая группа будет состоять из мультипликаторов первого рода, а вторая группа — из мультипликаторов второго рода. Поэтому при выполнении условия (7), составляющего часть условия (2), при малых возмущениях дифференциальной системы (5), ее решения будут оставаться ограниченными.

Оказывается, имеет место следующий признак:

если выполнено условие (7) и $M = M_P \leqslant \min(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, то решения системы (1) будут устойчиво ограничены, коль скоро

$$2\sqrt{\lambda_j - M} \text{ и } 2\sqrt{\lambda_j + M} \not\equiv 0 \pmod 1, \quad [2\sqrt{\lambda_j - M}] = [2\sqrt{\lambda_j + M}] \tag{8}$$

и для всякой пары индексов $j, k = 1, 2, \ldots, n$, для которых целые числа $[2\sqrt{\lambda_j - M}]$ и $[2\sqrt{\lambda_k - M}]$ имеют разную четность, интервалы

$$(\{2\sqrt{\lambda_j - M}\}, \{2\sqrt{\lambda_j + M}\}) \text{ и } (1 - \{2\sqrt{\lambda_k + M}\}, 1 - \{2\sqrt{\lambda_k - M}\})$$

не имеют общих точек.

Здесь через $[\mu]$ обозначена целая часть числа $\mu > 0$, а через $\{\mu\}$ — его дробная часть, так что $\{\mu\} = \mu - [\mu]$.

Не говоря о том, что в сформулированном признаке, в отличие от признака Г. Борга, вместо условия (2) принимается менее жесткое условие (7)

---

* Заметим, что скалярное произведение двух векторов $X = \{x_j\}_1^n$ и $Y = \{y_j\}_1^n$ определяется по формуле $(X, Y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$, где $\overline{y_j}$ — величины, комплексно сопряженные с y_j.

(допускающее, в частности, существование кратного спектра у L), признак (8) является более общим и более простым, нежели признак (6) Г. Борга.

Дифференциальная система (1) является частным случаем системы (3) с $P(t) = L - F(t)$, и если M_F определено, то $L - M_F I \leqslant P(t) \leqslant L + M_F I$.

Здесь мы пользуемся обозначением для симметрических матриц $A \leqslant B$, если соответствующие им квадратичные формы удовлетворяют тому же неравенству, то есть $(AX, X) \leqslant (BX, X)$ для любого n-мерного вектора X.

Ввиду этого условие (8) устойчивой ограниченности решений уравнения (1) является следствием следующего, более общего предложения, приведенного в статье М. Г. Крейна [4], которое мы сформулируем здесь в уточненной форме.

Пусть $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ — две постоянные симметричные матрицы, которым отвечают положительно-определенные квадратичные формы, причем $P^{(1)} < P^{(2)}$. Тогда для того, чтобы все решения уравнения (3) были устойчиво ограничены для периодической матрицы $P(t+T) = P(t)$, коль скоро выполняется условие $P^{(1)} \leqslant P(t) \leqslant P^{(2)}$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\{\frac{T\omega_j^{(1)}}{\pi}\right\} \text{ и } \left\{\frac{T\omega_j^{(2)}}{\pi}\right\} \not\equiv 0 \pmod 1, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

$$\left[\frac{T\omega_j^{(1)}}{\pi}\right] = \left[\frac{T\omega_j^{(2)}}{\pi}\right] \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

и чтобы для всякой пары индексов $j, k = 1, 2, \ldots, n$, для которых целые числа $\left[\frac{T\omega_j^{(1)}}{\pi}\right]$ и $\left[\frac{T\omega_k^{(1)}}{\pi}\right]$ имеют разную четность, интервалы

$$\left(\left\{\frac{T\omega_j^{(1)}}{\pi}\right\}, \left\{\frac{T\omega_j^{(2)}}{\pi}\right\}\right) \text{ и } \left(1 - \left\{\frac{T\omega_k^{(2)}}{\pi}\right\}, 1 - \left\{\frac{T\omega_k^{(1)}}{\pi}\right\}\right) \tag{11}$$

не имели общих точек*.

Ввиду того, что М. Г. Крейн не привел доказательство сформулированного предложения, приведем здесь доказательство его, основанное на следующей теореме М. Г. Крейна (см. [3], стр. 455, теорема 5.3).

Если в уравнении (3) матрица $P(t)$ непрерывно зависит от некоторого параметра и с возрастанием этого параметра «возрастает», то при этом мультипликаторы первого рода могут непрерывно смещаться по единичной окружности только против часовой стрелки, а второго — по часовой стрелке.

Для доказательства положим

$$Q_\varepsilon = P^{(1)} + \varepsilon (P^{(2)} - P^{(1)}).$$

Очевидно, что когда ε возрастает от 0 до 1, то Q_ε «возрастает» от $P^{(1)}$ до $P^{(2)}$. Обозначим через $\omega_1^2(\varepsilon) \leqslant \omega_2^2(\varepsilon) \leqslant \ldots \leqslant \omega_n^2(\varepsilon)$ собственные числа матрицы Q_ε, которые будут неубывающими функциями ε, причем

$$\omega_j(0) = \omega_j^{(1)}, \text{ а } \omega_j(1) = \omega_j^{(2)} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Очевидно, что числа $e^{i\omega_j(\varepsilon)T}$ будут мультипликаторами первого рода, а числа $e^{-i\omega_j(\varepsilon)T}$ — мультипликаторами второго рода дифференциальной

* Эта уточненная формулировка была сообщена автору М. Г. Крейном. В первоначальной формулировке (см. [4], стр. 660) требовалось, чтобы при любых j и k интервалы (11) не имели общих точек; кроме того, по недосмотру, в выражениях для концов интервалов (11) вместо π стояло 2π и было пропущено условие (9).

системы

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+Q_\varepsilon Y=0, \tag{12}$$

рассматриваемой, как систему с периодической матрицей Q_ε периода T.

Легко видеть, что условия (10) означают, что каждый мультипликатор первого рода (второго рода) системы (12) при изменении ε от 0 до 1 описывает в соответствующем направлении некоторую дугу γ_j (γ_j^*), лежащую целиком внутри нижней или верхней половины единичной окружности. Так как мультипликаторы второго рода получаются зеркальным отображением относительно вещественной оси мультипликаторов первого рода, то очевидно, что при нарушении хотя бы одного из условий (9), (10) при некотором ε $(0 \leqslant \varepsilon < 1)$ произойдет встреча мультипликаторов различных родов и для этого ε решения системы (12) не будут устойчиво ограничены.

Вторая группа условий (11) выражает, что если некоторый j-ый мультипликатор первого и κ-тый мультипликатор второго рода попадут на одну половину единичной окружности (верхнюю или нижнюю), то при изменении ε от 0 до 1 они опишут дуги, не имеющие общих точек.

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+P_\varepsilon(t)Y=0, \tag{13}$$

где $P_\varepsilon(t)=P^{(1)}+\varepsilon(P(t)-P^{(1)})$. При $\varepsilon>0$, достаточно малом, все мультипликаторы системы (13) будут лежать на единичной окружности и будут мультипликаторами первого или второго рода. Более того, они будут лежать на тех же дугах $\gamma_j(\gamma_j^*)$, не опережая соответствующих мультипликаторов системы (12). Последний факт вытекает из того, что можно построить периодическую матрицу $P_{\varepsilon,\delta}(t)$, которая при возрастании δ от 0 до 1 будет «возрастать» от $P^{(1)}$ до Q_ε, проходя при $\delta=\frac{1}{2}$ через $P_\varepsilon(t)$. Для этого достаточно положить

$$P_{\varepsilon,\delta}(t)=P^{(1)}+2\delta(P_\varepsilon(t)-P^{(1)})\ \left(0\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{2}\right),$$

$$P_{\varepsilon,\delta}(t)=P_\varepsilon(t)+(2\delta-1)(Q_\varepsilon-P_\varepsilon(t))\ \left(\frac{1}{2}\leqslant\delta\leqslant 1\right).$$

При непрерывном увеличении ε от 0 до 1 каждый из мультипликаторов системы (13), двигаясь в определенном направлении позади соответствующего мультипликатора системы (12), никогда не покинет соответствующей дуги $\gamma_j(\gamma_j^*)$ и, следовательно, не встретит мультипликатора противоположного рода.

Таким образом, при любом $0<\varepsilon\leqslant 1$ решения системы (13) устойчиво ограничены. Так как при $\varepsilon=1$ система (13) совпадает с системой (3), то предложение М. Г. Крейна доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Borg, Deux notes concernant la stabilité, Publication Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, 281; Actes du Colloque International des vibrations non linéaires, Ile de Porquerolles, 1951.

2 М. Г. Крейн, Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами, ДАН СССР, т. LXXIII, № 3, 1950, 445—448.

3. М. Г. Крейн, Основные положения теории λ-зон устойчивости канони-

ческой системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, Сборник памяти А. А. Андронова, Изд-во АН СССР, 1955, 413—498.

4. М. Г. Крейн, О признаках устойчивой ограниченности решений периодических канонических систем, ПММ, т. XIX, вып. 6, 1955, 641—680.

5. И. М. Гельфанд и В. Б. Лидский. О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, УМН, т. X, вып. 1 (63) 1955, 3—40.

Поступила 26. IV 1960 г.
Одесса