$$+ \varrho - h^{\alpha}]\int\limits_0^1 \frac{t^{\frac{x}{h}}}{1+t}\,dt + \frac{h}{x}[x^{\alpha} - (h-x)^{\alpha}]\Bigg\} + O(n^{-1-\alpha}).$$

Если считать x произвольным, то в силу (2), в последнем выражении нужно x заменить на $\bar{x}$, где

$$\bar{x} = \min_k |x - x_k^{(n)}|.$$

Учитывая, что

$$h^{\alpha} = \left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{\alpha}\left[1 + \frac{\alpha}{2(n+1)} + O(n^{-2})\right]$$

и вводя для краткости обозначение $\frac{\bar{x}}{h} = u$, окончательный результат можем записать в виде:

$$\mathscr{E}\mathfrak{z}_n(H^{(\alpha)}, x) = \left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\frac{\ln(n+1)}{\pi^{1-\alpha}(n+1)^{\alpha}} + C(\alpha, u)\frac{\pi^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}} +$$

$$+ \left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\frac{\alpha\ln(n+1)}{2\pi^{1-\alpha}(n+1)^{\alpha+1}} + O(n^{-1-\alpha}) \quad (0 < \alpha \leqslant 1),$$

где

$$C(\alpha, u) = (1-u)^{\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sin\pi u\left\{\ln\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}\psi(u) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\psi(1-u) + \frac{1}{u}[u^{\alpha} - (1-u)^{\alpha}] + \eta\int\limits_0^1 \frac{t^{u}}{1+t}\,dt\right\},$$

причем функция $\psi(z)$ определена равенством (9), а η есть меньшее из чисел $2^{\alpha} - 1$ и $(1-u)^{\alpha} - u^{\alpha}$ (при фиксированных α и u).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский, Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, т. XV, 1945.

Поступила 4. V 1959 г.
Днепропетровск

Возмущение самосопряженного оператора конечномерным и условие полноты

А. В. Кужель

1. Вопрос о полноте системы корневых векторов оператора $B+K$ (B — самосопряженный) при различных ограничениях, накладываемых на операторы B и K, рассматривался в работах [1]—[6] и др. В частности, в [6] автором было показано, что система корневых векторов диссипативного K^r-оператора * A полна, если оператор A не имеет непрерывного спектра и $D_A = D_{A^*}$. Здесь мы освобождаемся от условия

---

* Несамосопряженное расширение A эрмитова оператора A_0 с индексом дефекта (r, r), называется K^r-оператором [7], если в полуплоскостях $\mathrm{Im}\lambda > 0$ и $\mathrm{Im}\lambda < 0$ имеется по меньшей мере по одной регулярной точке оператора A и

$$\dim D_A = r \pmod{D_{A_0}}.$$

диссипативности оператора K. Однако при этом оператор $B+K$ приходится подчинять более жестким ограничениям, чем в [6] (требование «правильности» корневых подпространств, которое сформулировано ниже).

Пусть $\varphi\,(\varphi \neq 0)$ — корневой вектор оператора A, отвечающий собственному значению λ_0, то есть

$$(A-\lambda_0 I)^n \varphi = 0,$$

где n — некоторое натуральное число. Число n называется показателем корневого вектора φ, если $(A-\lambda_0 I)^{n-1}\varphi \neq 0$. Обозначим через H_{λ_0} замыкание линейной оболочки системы корневых векторов оператора A, отвечающих собственному значению λ_0. Подпространство H_{λ_0} называется корневым подпространством оператора A.

Корневое подпространство H_{λ_0} называется правильным, если

1) показатель произвольного корневого вектора $\varphi \in H_{\lambda_0}$ ограничен сверху некоторым числом N, зависящим только от λ_0;

2) в подпространстве H_{λ_0} оператор A индуцирует ограниченный оператор. В частности, очевидно, любое конечномерное корневое подпространство является правильным.

Будем говорить, что оператор A не имеет в конечной части плоскости непрерывного спектра*, если расположенные в конечной части плоскости спектры операторов A_1 и A_2, которые индуцируются операторами A и A^* в произвольных инвариантных подпространствах, состоят лишь из собственных значений этих операторов и любое корневое подпространство оператора A является правильным. Тогда имеет место следующая

Теорема. *Если оператор $A = B + K$, где B — самосопряженный (ограниченный или неограниченный), а K — конечномерный, не имеет в конечной части плоскости непрерывного спектра, то система корневых векторов этого оператора полна.*

Доказательство. Так как оператор B самосопряженный, а K — конечномерный, то оператор A замкнут и $D_A = D_{A^*}$. Обозначим через $\mathfrak{L}$ линейную оболочку всех корневых векторов оператора A, и пусть $H_1 = \overline{\mathfrak{L}}$. Положим $A_1 = A_{\mathfrak{L}}$. Тогда $D_{A_1} = \mathfrak{L} \subset D_A$.

I. Покажем, что

$$D_{\overline{A}_1} = D_A \cap H_1,$$

где $\overline{A}_1$ — замыкание оператора A_1 (так как оператор A замкнут и $A_1 \subset A$, то оператор A_1 допускает замыкание).

Действительно, если $f \in D_{\overline{A}_1}$, то либо $f \in \mathfrak{L}$, и тогда $f \in D_A \cap H_1$, либо существует такая последовательность $\{f_n\}$ $(f_n \in \mathfrak{L})$, что $f_n \to f$, $A_1 f_n = A f_n \to g$. Но тогда (в силу замкнутости оператора A) $f \in D_A$ и $Af = g = \overline{A}_1 f$. Таким образом, $D_{\overline{A}_1} \subset D_A \cap H_1$, причем $\overline{A}_1 \subset A$. Предположим, что $D_{\overline{A}_1} \neq D_A \cap H_1$, и рассмотрим оператор $T = P_1 A|_{D_A \cap H_1}$, где P_1 — оператор проектирования на H_1. В силу ранее сказанного, $\overline{A}_1 \subset T$. Отсюда $T^* \subset \overline{A}_1^* = A_1^*$. Следовательно, $D_{\overline{A}_1} \subset D_T$, $D_{T^*} \subset D_{A_1^*}$. Пусть $g \in D_{\overline{A}_1}$. Тогда при любом $f \in D_{A_1}$

$$(\overline{A}_1 f, g) = (Af, g) = (f, A^* g) = (f, \overline{A}_1^* g).$$

Следовательно, $D_{\overline{A}_1} \subset D_{A_1^*}$.

---

* Из того, что оператор A не имеет в конечной части плоскости непрерывного спектра, ещё не вытекает, что его спектр не имеет конечных предельных точек.

Обозначим через $G_{A_1^*}$ множество векторов $f \in D_{A_1^*}$ и таких, что при любом $g \in D_{A_1^*}$

$$(A_1^* f, g) = (f, A_1^* g). \tag{1}$$

Тогда, как легко видеть, оператор $A_0 = A_1^*|_{G_{A_1^*}}$ эрмитов.

При этом оператор A_1^* можно рассматривать как несамосопряженное расширение оператора A_0. Переписывая равенство (1) в виде

$$(A_1^* g, f) = (g, A_1^* f),$$

видим, что $f \in D_{\overline{A}_1}$ и $\overline{A}_1 f = A_1^* f$. В таком случае при любом $\varphi \in D_{\overline{A}_1}$

$$(\overline{A}_1 f, \varphi) = (A_1^* f, \varphi) = (f, \overline{A}_1 \varphi),$$

то есть $f \in G_{\overline{A}_1}$. Таким образом, $G_{A_1^*} \subset G_{\overline{A}_1}$. Аналогично устанавливается включение $G_{\overline{A}_1} \subset G_{A_1^*}$. Следовательно,

$$G_{\overline{A}_1} = G_{A_1^*} = G \tag{2}$$

Далее, из соотношений (2) и $D_{\overline{A}_1} \subset D_{A_1^*}$ вытекает, что

$$\dim D_{\overline{A}_1} \leqslant \dim D_{A_1^*} \ (\mathrm{mod}\, G). \tag{3}$$

При этом если $D_{\overline{A}_1} \neq D_{A_1^*}$, то в соотношении (3), в силу конечномерности оператора K, имеет место знак неравенства. Пусть λ — регулярная точка оператора A. Тогда при любом $f \in D_{\overline{A}_1}$

$$\|(\overline{A}_1 - \lambda I) f\| = \|(A - \lambda I) f\| \geqslant d(\lambda)\|f\|,$$

где $d(\lambda) > 0$. Следовательно, λ есть точка регулярного типа для оператора $\overline{A}_1$. Покажем, что

$$\mathfrak{R} = (\overline{A}_1 - \lambda I) D_{\overline{A}_1} = H_1. \tag{4}$$

Для этого рассмотрим корневые векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ оператора A, отвечающие собственному значению λ_0 и определяемые равенствами

$$(A - \lambda_0 I) e_k = e_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \quad (A - \lambda_0 I) e_n = 0.$$

Так как $\lambda \neq \lambda_0$, то из равенства

$$(A - \lambda I) e_n = (\lambda_0 - \lambda) e_n$$

следует, что $e_n \in \mathfrak{R}$. Рассматривая теперь равенства

$$(A - \lambda I) e_k = e_{k+1} + (\lambda_0 - \lambda) e_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

видим, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ также содержатся в многообразии $\mathfrak{R}$. Но тогда линейная оболочка корневых векторов $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}$. А так как $\overline{\mathfrak{L}} = H_1$, то $\overline{\mathfrak{R}} = H_1$. Таким образом, для доказательства равенства (4) остается показать, что многообразие $\mathfrak{R}$ замкнуто. Пусть $f_n \in \mathfrak{R}$, $f_n \to f$. Тогда

$$f_n = (\overline{A}_1 - \lambda I) \varphi_n = (A - \lambda I) \varphi_n \quad (\varphi_n \in D_{\overline{A}_1}).$$

Отсюда $\varphi_n = R_\lambda f_n$, где $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. Положим $\varphi = R_\lambda f$. Тогда

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leqslant \|R_\lambda\| \|f_n - f\|,$$

откуда следует, что $\varphi_n \to \varphi$. Таким образом, $\varphi_n \in D_{\overline{A}_1}$, $\varphi_n \to \varphi$, $(\overline{A}_1 - \lambda I)\varphi_n \to f$. Следовательно, $\varphi \in D_{\overline{A}_1}$ и $(\overline{A}_1 - \lambda I)\varphi = f$, то есть $f \in \mathfrak{R}$.
Этим равенство (4) доказано.

Далее из того, что λ — точка регулярного типа оператора $\overline{A}_1$, из равенства (4) вытекает, что λ — регулярная точка оператора $\overline{A}_1$. Замечая теперь, что многообразия $D_{(\overline{A}_1 - \lambda I)}$ и $D_{(\overline{A}_1 - \lambda I)^{-1}}$ плотны в H_1, можем утверждать, что $(\overline{A}_1 - \lambda I)^{-1*} = (A_1^* - \overline{\lambda} I)^{-1}$. Следовательно, $\overline{\lambda}$ регулярная точка оператора A_1^*. В таком случае

$$H_1 = (\overline{A}_1 - \lambda I) D_{\overline{A}_1} = (A_1^* - \overline{\lambda} I) D_{A_1^*}. \tag{5}$$

Положим

$$\mathfrak{M}_\lambda = (\overline{A}_1 - \lambda I) G_{\overline{A}_1}, \ \mathfrak{N}_\lambda = H_1 \ominus \mathfrak{M}_\lambda, \ r = \dim \mathfrak{N}_\lambda.$$

Тогда, используя (5), нетрудно получить, что

$$\dim D_{\overline{A}_1} = r \,(\mathrm{mod}\, G), \quad \dim D_{A_1^*} = r \,(\mathrm{mod}\, G).$$

Следовательно, в соотношении (3) имеет место знак равенства. А это значит, что $D_{\overline{A}_1} = D_{A_1^*}$.

Пусть теперь $g \in D_A \cap H_1 = D_{A_1^*} \cap H_1$ и f — произвольный вектор из $D_{\overline{A}_1}$. Тогда

$$(\overline{A}_1 f, g) = (Af, g) = (f, A^* g),$$

откуда следует, что $g \in D_{A_1^*}$. Таким образом, приходим к выводу, что $D_A \cap H_1 \subset D_{\overline{A}_1}$. А так как ранее было показано, что $D_{\overline{A}_1} \subset D_A \cap H_1$, то этим равенство $D_{\overline{A}_1} = D_A \cap H_1$ доказано.

2. Пусть $f \in D_A$. Тогда при любом $\varphi \in D_{\overline{A}_1}$

$$(\overline{A}_1 \varphi, P_1 f) = (A\varphi, f) = (\varphi, P_1 A^* f).$$

Следовательно, $P_1 f \in D_{A_1^*} = D_{\overline{A}_1} = D_A \cap H_1$. А это значит, что

$$P_1 D_A = D_A \cap H_1, \quad P_2 D_A = D_A \cap H_2.$$

Положим $D_{A_2} = D_A \cap H_2$ и $A_2 f = P_2 A f$ $(f \in D_{A_2})$.
Тогда

$$D_A = D_{\overline{A}_1} + D_{A_2}$$

и

$$A = \overline{A}_1 P_1 + A_2 P_2 + \Gamma P_2, \tag{6}$$

где Γ — некоторый оператор, отображающий D_{A_2} в H_1.
Далее, если $g \in D_{A_2^*}$, то при любом $f \in D_A$

$$(Af, g) = (AP_2 f, g) = (A_2 f_2, g) = (f, A_2^* g) \quad (f_2 = P_2 f).$$

Следовательно, $g \in D_A \cap H_2$, то есть $D_{A_2^*} \subset D_A \cap H_2$.
Аналогично проверяется, что $D_A \cap H_2 \subset D_{A_2^*}$. Таким образом,

$$D_{A_2^*} = D_A \cap H_2 = D_{A_2}.$$

В заключение этого пункта покажем, что операторы A_1 и A_2 могут быть представлены в виде $A_1 = B_1 + K_1$, $A_2 = B_2 + K_2$, где $B_1 B_2$ — самосопряженные, а K_1, K_2 — конечномерные операторы. Действительно, пусть $f_1 \in G_A \cap H_1$. Тогда $Af_1 = A^* f_1$, или $\overline{A}_1 f_1 = A_1^* f_1 + \Gamma^* f_1$ (в силу того, что $A^* = A_1^* P_1 + A_2^* P_2 + \Gamma^* P_1$). Отсюда $\Gamma^* f_1 = 0$ и $\overline{A}_1 f_1 = A_1^* f_1$, то есть $f_1 \in G_{\overline{A}_1}$. А так как

$$\dim D_A \cap H_1 \leqslant r (\operatorname{mod} G_A \cap H_1),$$

то

$$\dim D_{\overline{A}_1} \leqslant r (\operatorname{mod} G_{\overline{A}_1}),$$

то есть оператор $\overline{A}_1$ может отличаться от самосопряженного оператора лишь на конечном множестве линейно независимых векторов. Этим равенство $A_1 = B_1 + K_1$ доказано. Аналогично устанавливается равенство $A_2 = B_2 + K_2$. Последнее означает, что операторы A_1 и A_2 есть K^r-операторы в смысле работы [7].

3. Покажем, что оператор A_2 не имеет спектра в конечной части плоскости. Так как по условию оператор A не имеет в конечной части плоскости непрерывного спектра, то спектр оператора A_2^*, а, значит, и оператора A_2 может состоять лишь из собственных значений этих операторов. Пусть λ_0 — собственное значение оператора A_2. Тогда λ_0 есть собственное значение оператора A, а значит, и оператора $\overline{A}_1$. Обозначим через H_{λ_0} корневое подпространство, отвечающее собственному значению λ_0, и положим $H' = H \ominus H_{\lambda_0}$. Тогда оператор A можно представить в виде $A = A_0 P_0 + A' P' + \Gamma' P'$, где A_0 — оператор, совпадающий с A на H_{λ_0} и с $D_{A_0} = H_{\lambda_0}$; A' — оператор, совпадающий с $P' A$ на многообразии $D_A \cap H'$ и определенный только на этом многообразии; Γ' — некоторый оператор, отображающий $D_{A'}$ в H_{λ_0}; P_0 и P' — операторы проектирования на H_{λ_0} и H' соответственно. При этом равенство $D_{A_0} = H_{\lambda_0}$ справедливо на основании того, что, по условию, оператор A замкнут и индуцирует в H_{λ_0} ограниченный оператор.

Покажем, что точка λ_0 не может принадлежать спектру оператора A'. Действительно, предположим, что при некотором $f' \in H'$ $(f' \neq 0)$ $(A' - \lambda_0 I) f' = 0$. Так как при некотором $f_0 \in H_{\lambda_0}$ $(A_0 - \lambda_0 I) f_0 = 0$, то

$$(A - \lambda_0 I) \varphi = \Gamma' f' \quad (\varphi = f_0 + f'),$$

причем $\Gamma' f' \in H_{\lambda_0}$. По условию существует число N такое, что показатель произвольного корневого вектора φ, отвечающего собственному значению λ_0, не превосходит N. Следовательно, оператор $(A - \lambda_0 I)^N$ аннулируется на H_{λ_0}. Поэтому

$$(A - \lambda_0 I)^{N+1} \varphi = (A - \lambda_0 I)^N \Gamma' f' = 0,$$

то есть вектор φ есть корневой вектор оператора A, отвечающий числу λ_0. А это значит, что $\varphi \in H_{\lambda_0}$, то есть $f' = 0$. Таким образом, λ_0 не принадлежит спектру оператора A'. А так как оператор A', действующий в пространстве $H' = \widetilde{H} \oplus H_2$ $(\widetilde{H} = H_1 \ominus H_{\lambda_0})$ может быть в свою очередь представлен в виде

$$A' = \widetilde{A}\widetilde{P} + A_2 P_2 + \Gamma_2 P_2,$$

где $\widetilde{A} = A' \big|_{\widetilde{H} \cap D_{A'}}$, $\widetilde{P}$ — оператор проектирования на $\widetilde{H}$, Γ_2 — оператор, отображающий D_{A_2} в $\widetilde{H}$, то, в силу рассуждений, изложенных в начале этого пункта, точка λ_0 не может принадлежать спектру оператора A_2.

4. Таким образом, в силу предыдущих рассуждений:
1) оператор A_2 не имеет спектра в конечной части плоскости, 2) $D_{A_2} = D_{A_2^*}$, 3) оператор A_2 есть K^r-оператор в смысле работы [7].

5. Пусть $\widetilde{H}_2 \subset H_2$ — наиболее широкое инвариантное подпространство оператора A_2, на котором оператор A_2 совпадает со своим сопряженным. Положим $H_p = H_2 \ominus \widetilde{H}_2$, $D_{A_p} = D_{A_2} \cap H_p$, $A_p = A_2 |_{D_{A_p}}$. Повторяя предыдущие рассуждения относительно оператора A_p, придем к выводу, что он удовлетворяет тем же условиям что и оператор A_2, то есть: 1) оператор A_p не имеет спектра в конечной части плоскости, 2) $D_{A_p} = D_{A_p^*}$, 3) оператор A_p есть K-оператор в смысле работы [7]. Кроме того, оператор A_p простой (то есть A_p ни на каком инвариантном подпространстве не совпадает со своим сопряженным). Но в таком случае, как показано в [7], оператор A_p изоморфен своей треугольной моделе $\vec{A}_p$, для которой характерно неравенство $D_{\vec{A}_p} \neq D_{\vec{A}_p^*}$. А это невозможно при $D_{A_p} = D_{A_p^*}$. Полученное противоречие показывает, что $H_1 = H$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Келдыш. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН, 77 № 1, 1951

2. М. А. Наймарк, О некоторых признаках полноты системы собственных и присоединенных векторов линейного оператора в гильбертовом пространстве ДАН, 98, № 5, 1954.

3. М. С. Лившиц, О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, Матем. сб., т. 34 (76), в. 1, 1954

4. Б. Р. Мукминов, О разложении по собственным функциям диссипативных ядер, ДАН. 99, № 4, 1954

5. М. Г. Крейн, О признаках полноты системы корневых векторов диссипативного оператора, УМН, XIV, вып. 3 (87), 1959

6. А. В. Кужель, Спектральный анализ неограниченных несамосопряженных операторов, ДАН, 125, № 1. 1959

7. А. В. Кужель, О приведении неограниченных несамосопряженных операторов к треугольному виду, ДАН, 119, № 5, 1958

8. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН. XII, в. 2 (74), 1957

Поступила 1. X 1959 г.
Умань