Об одном примере точечного множества

Ю. Ю. Трохимчук

В статье [1] формулируется следующая теорема: *на прямой (или, что то же, на отрезке* $[0, 1]$) *существует множество первой категории и (лебеговой) меры нуль, не представимое в виде счетной суммы множеств жордановой меры нуль.*

Но приведенное доказательство этой теоремы некорректно, так как основано на следующем совершенно неверном положении: множество $\mathscr{E}$ первой категории и всюду плотное на $[0, 1]$ содержит множество второй категории на $\mathscr{E}$. Легко, однако, видеть, что для такого множества каждое его подмножество — первой категории на $\mathscr{E}$, так как уже само $\mathscr{E}$ — первой категории на себе. В самом деле, по условию

$$\mathscr{E} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{E}_i,$$

где $\mathscr{E}_i$ — нигде не плотны на $[0, 1]$, а потому (в силу плотности $\mathscr{E}$ на $[0, 1]$) нигде не плотны и на $\mathscr{E}$; а это и доказывает наше утверждение.

Мы дадим точное доказательство приведенной выше теоремы, даже несколько усилив ее формулировку: *на отрезке* $[0, 1]$ *существует нигде не плотное множество (лебеговой) меры нуль, не представимое в виде счетной суммы множеств жордановой меры нуль.*

Для этого рассмотрим произвольное всюду разрывное на $[0, 1]$ совершенное множество P, каждая порция которого имеет положительную меру. Покажем, что множество $\mathscr{E} \subset P$ всюду второй категории на P и линейной меры нуль (если оно существует) доказывает нашу теорему.

В самом деле, предполагая противное, будем иметь:

$$\mathscr{E} = \bigcup_i \mathscr{E}_i,$$

где каждое $\mathscr{E}_i$ — жордановой меры нуль. Отсюда следует, что и замыкание каждого $\mathscr{E}_i$ также жордановой меры нуль. Но так как $\mathscr{E}$ — второй категории на P, то найдется его порция $P' = [\alpha, \beta] \cap P([\alpha, \beta]$ — часть отрезка $[0, 1])$, на которой одно из множеств $\mathscr{E}_i$ всюду плотно и, следовательно, для этого $\mathscr{E}_i$ имеем:

$$\overline{\mathscr{E}}_i = P'.$$

Но, по условию, $\operatorname{mes} P' > 0$; это же означает, что внешняя жорданова мера $\mathscr{E}_i$ и $\overline{\mathscr{E}}_i$ — положительна, что противоречит нашему предположению.

Остается показать, что на множестве P с указанными выше свойствами действительно существует множество $\mathscr{E}$ второй категории и меры нуль.

Для этого рассмотрим на отрезке $[0,1]$ характеристическую функцию множества P:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in P \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1] \setminus P \end{cases}$$

и функцию

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(x)\, dx.$$

Ясно, что $\Phi(x)$ — монотонно неубывающая функция, принимающая постоянное значение на каждом интервале смежности (a_n, b_n) $(n = 1, 2 \dots)$ к множеству P, стображающая стрезок $[0, 1]$ оси x-ов, а также множество P на отрезок $I \equiv [0, \operatorname{mes} P]$ оси y-ов; сбраз всех интервалов смежности (a_n, b_n) $(n = 1, 2, \dots)$ при этом есть счетное всюду плотное на I множество S.

На отрезке I возьмем множество $\mathscr{E}'$ всюду второй категории и (лебеговой) меры нуль: построение таких множеств не представляет труда. Будем считать также, что $\mathscr{E}'$ не пересекается с множеством S, так как в случае необходимости мы бы рассмотрели $\mathscr{E}' \setminus S$: в силу счетности S при этом сохраняется и категория и мера $\mathscr{E}'$.

Прообраз множества $\mathscr{E}'$ на оси x-ов при отображении

$$y = \Phi(x) \tag{1}$$

обозначим через $\mathscr{E}$; ясно, что $\mathscr{E} \subset P$ и соответствие (1) между $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ взаимно однозначно. Легко видеть, что $\mathscr{E}$ — всюду второй категории на P и меры нуль.

В самом деле, образ дополнения $H = P \setminus \mathscr{E}$ (при отображении (1) есть множество H', принадлежащее дополнению $I \setminus \mathscr{E}'$ (легко видеть, что оно просто совпадает с последним), а потому есть множество первой категории на I, то есть

$$H' = \bigcup_i H'_i,$$

где каждое H'_i — нигде не плотно на I. Прообраз H_i множества H'_i также нигде не плотен на P, так как если бы H_i было плотно на некоторой порции $P' = [\alpha, \beta] \cap P$, то и образ его H'_i был бы плотен на — очевидно, невырожденном — отрезке $[\Phi(\alpha), \Phi(\beta)]$. Но, очевидно, что

$$H = \bigcup_i H_i,$$

то есть H — первой категории на P и, следовательно, $\mathscr{E} \subset P$ — всюду второй категории.

Далее, если бы внешняя мера $\mathscr{E}$ была положительна, то почти всюду на $\mathscr{E}$ функция $\Phi(x)$ была бы дифференцируема и $\Phi'(x) = 1$, откуда легко следовало бы, что и внешняя мера образа $\mathscr{E}'$ положительна, а это невозможно.

Тем самым высказанная нами теорема доказана.

Из свойств множества $\mathscr{E} \subset P$ следует, что оно не может быть множеством (и даже его подмножеством) всех точек разрыва интегрируемой по Риману функции; в этом последнем можно убедиться также и непосредственно, легко доказав более общее утверждение, а именно: $\mathscr{E}$ не может быть множеством типа F_σ (но может быть типа G_δ, если и $\mathscr{E}'$ выбрано таким же)

Очевидно, что взяв на плоскости xOy произведение $\mathscr{E} \times [0, 1]$, мы получим нигде не плотное множество со свойствами, аналогичными свойствам множества $\mathscr{E}$, но уже относительно плоскости; составляя произведение $\mathscr{E} \times Q_{n-1}$, где Q_{n-1} — единичный куб в эвклидовом пространстве R^{n-1}, легко придем к следующему общему утверждению.

В любом эвклидовом пространстве R^n существует ограниченное нигде не плотное множество $\mathscr{E}$ лебеговой (n-мерной) меры нуль, не представимое в виде счетной суммы множеств жордановой меры нуль.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Marcus, Remarques sur les fonctions intégrables au sens de Riemann, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. R., t. 2 (50), n°4, 1958, 433—439.

Поступила 13. VII 1960 г.
Киев