1961 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. XIII, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Число блоков характеров конечной группы данного дефекта

А. А. Бовди

§ 1

В работе рассматривается задача Р. Брауэра о групповой характеристике числа блоков данного дефекта. Улучшена верхняя оценка числа блоков данного дефекта, данная Брауэром и Несбитт [см. 7]. Доказано, что эта оценка является равенством для одного класса конечных групп. Дается необходимое и достаточное условие отсутствия блоков нулевого дефекта.

Автор выражает глубокую благодарность С. Д. Берману, руководившему выполнением этой работы.

§ 2

Введем следующие обозначения:
G — конечная группа порядка $n = p^a q$ ($(p, q) = 1$, p – простое число); R — поле рациональных чисел; ε – первообразный корень n-ой степени из I; $\mathfrak{P}$ – простой идеал поля $R(\varepsilon)$, где $p \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$; Ω — кольцо $\mathfrak{P}$-целых величин поля $R(\varepsilon)$; $\Omega^* = \Omega/\mathfrak{P}$; $R(G, \Omega^*)$ — групповая алгебра группы G над полем Ω^*: $K_1, \ldots, K_t$ — классы сопряженных элементов группы G; k_i — сумма элементов класса K_i в $R(G, \Omega^*)$; $F_1, \ldots, F_l$ — неприводимые модулярные представления группы G над полем Ω^*, распадающиеся на „s" блоков $B_1, \ldots, B_s$ [F_i и F_j принадлежат одному блоку B_τ, если они совпадают на элементах центра $R(G, \Omega^*)$]; $X_1, \ldots, X_t$ — характеры всех неприводимых представлений $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t$ группы G над полем комплексных чисел, которые также распадаются на „s" блоков $B_1, \ldots, B_s$; Γ_i и Γ_j принадлежат одному блоку, если

$$\frac{h_r X_i(a_r)}{n_i} \equiv \frac{h_r X_j(a_r)}{n_j} \pmod{\mathfrak{P}} \qquad (r = 1, \ldots, t),$$

где $a_r \in K_r$; n_i — степень неприводимого представления Γ_i; h_r — порядок класса K_r.

Неприводимый характер X_i группы G определяет характер ω_i центра комплексной групповой алгебры группы G:

$$\omega_i(k_\alpha) = \frac{h_\alpha X_i(a_\alpha)}{n_i} \quad (a_\alpha \in K_\alpha).$$

После приведения ω_i по $\operatorname{mod} \mathfrak{P}$ получаем модулярный характер ω_i^* центра $R(G, \Omega^*)$.

Класс K_α называется p-регулярным, если порядки всех элементов класса K_α не делятся на p.

Будем называть класс K_α нильпотентным, если элемент k_α в $R(G, \Omega^*)$ нильпотентен.

Подгруппа $H_\alpha \subseteq G$ порядка p^d называется дефектной группой класса K_α, если H_α является силовской p-подгруппой нормализатора некоторого элемента из K_α. Показатель степени d называется дефектом класса K_α.

Если p^d — максимальная степень простого числа p, на которую делятся все числа $n/n_{\tau j}$ $(j = 1, \ldots, m_\tau)$, где $n_{\tau j}$ $(j = 1, \ldots, m_\tau)$ — степени всех неприводимых комплексных представлений группы G, принадлежащих блоку B_τ, то показатель степени d называется дефектом блока B_τ. Каждому блоку B_τ дефекта d сопоставляется дефектная группа блока — дефектная группа такого p-регулярного класса K_α дефекта d, что

$$\omega_\tau^*(k_\alpha) \neq 0,$$

где ω_τ^* — модулярный характер центра $R(G, \Omega^*)$, соответствующий блоку B_τ.

Лемма 1. [см. I]. *Если группа G содержит нормальный делитель H порядка p^μ $(\mu \geqq 0)$, то все классы группы G, которые не принадлежат централизатору $C(H)$ подгруппы H в группе G, нильпотентны.*

Лемма 2. *Пусть H — нормальный делитель порядка p^μ группы G. Дефектная группа H_ν класса K_ν содержит H тогда и только тогда, когда K_ν принадлежит централизатору $C(H)$ подгруппы H в группе G.*

Доказательство леммы очевидно.

На основании леммы 1 и 2 получаем:

Лемма 3. *Пусть H — максимальный нормальный делитель порядка p^γ группы G. Все классы K_ν группы G, дефектные группы которых не содержат H, нильпотентны.*

Следствие I. Все классы группы G, дефекты которых меньше γ, нильпотентны.

Для элементов центра k_ν групповой алгебры $R(G, \Omega^*)$ имеет место соотношение:

$$k_\alpha k_\beta = \sum_\gamma a_{\alpha\beta}^\gamma k_\gamma, \tag{1}$$

где $a_{\alpha\beta}^\gamma$ — целые неотрицательные числа [по mod p].

Пусть H — подгруппа порядка p^μ группы G; $K_\alpha^0 = K_\alpha \cap C(H)$; k_i^0 — сумма элементов K_i^0 в $R(G, \Omega^*)$. [Если $K_\alpha \cap C(H) = \Lambda$, то, по определению, $K_\alpha^0 = 0$].

В соответствии с (1), для элементов k_α^0 имеет место разложение:

$$k_\alpha^0 k_\beta^0 = \sum_\gamma a_{\alpha\beta}^\gamma k_\gamma^0. \tag{2}$$

Лемма 4. *Пусть H — p-подгруппа группы G и $N(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G.*

Число p-регулярных не нильпотентных классов с дефектной группой H группы $N(H)$ не превосходит числа p-регулярных не нильпотентных классов с дефектной группой H группы G.

Доказательство. Если H — дефектная группа класса K_ν, то K_ν содержит один и только один класс группы $N(H)$ [см. I]. Следовательно, число p-регулярных классов с дефектной группой H группы $N(H)$ равно числу p-регулярных классов группы G с той же дефектной группой.

$K_\nu^0 = K_\nu \cap C(H)$ — класс сопряженных элементов группы $N(H)$. Если K_ν — нильпотентный класс группы G, то из равенства (2) следует, что класс K_ν^0 группы $N(H)$ нильпотентен.

Лемма доказана.

Лемма 5. [см. 3]. *Если группа G содержит нормальный делитель H порядка p^d, то дефект всех блоков B_τ группы G не меньше d и дефектная группа каждого блока B_τ содержит нормальный делитель H.*

Лемма 6. [см. 4]. *Пусть H — нормальный делитель порядка p^d $(d \geqslant 0)$ группы G и B_τ блок группы G с дефектной группой H. Тогда неразложимый идемпотент E_τ^* центра $R(G, \Omega^*)$, соответствующий блоку B_τ, имеет вид:*

$$E_\tau^* = \sum_\alpha e_\alpha^* k_\alpha \qquad (e_\alpha^* \in \Omega^*), \tag{3}$$

где сумма в правой части распространена на p-регулярные классы K_α с дефектной группой $H_\alpha = H$.

Лемма 7. *Если дефектная группа H_τ блока B_τ дефекта d является нормальным делителем группы G, то число блоков дефекта d группы G не превосходит числа p-регулярных не нильпотентных классов дефекта d группы G.*

Доказательство. Если дефектная группа H_τ блока B_τ является нормальным делителем группы G, то, согласно лемме 5, дефектная группа всех остальных блоков дефекта d группы G совпадает с H_τ.

Пусть R — радикал центра Z алгебры $R(G, \Omega^*)$. Если все идемпотенты вида (3), соответствующие блокам с дефектной группой H_τ, привести по $\mathrm{mod}\ R$, то получим минимальные идемпотенты фактор-алгебры Z/R, которые являются линейными комбинациями классов вычетов $(k_l + R)$, где K_l пробегает все p-регулярные не нильпотентные классы с дефектной группой H_τ.

Следовательно, число блоков дефекта d группы G, дефектная группа которых является нормальным делителем группы, не превышает числа p-регулярных не нильпотентных классов группы G с той же дефектной группой, совпадающего, в силу леммы 3, с числом p-регулярных не нильпотентных классов группы с дефектом d.

Лемма доказана.

Лемма 8. [см. 5]. *Пусть $\{D_\alpha\}$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ полная система дефектных групп блоков дефекта d группы G. Если $N(D_\alpha)$ содержит точно s_α блоков дефекта d [то есть блоков с дефектной группой D_α], то G содержит точно $\sum_{\alpha=1}^{m} s_\alpha$ блоков дефекта d.*

Теорема 1. *Число блоков дефекта d группы G не превосходит числа p-регулярных не нильпотентных классов дефекта d группы G.*

Доказательство. Пусть $\{D_\alpha\}$ — полная система дефектных групп блоков дефекта d группы G. Вследствие леммы 7, число блоков группы $N(D_\alpha)$ с дефектной группой D_α не превосходит числа не нильпотентных p-регулярных классов группы $N(D_\alpha)$ с дефектной группой D_α, которое, в силу леммы 4, не превышает числа не нильпотентных p-регулярных классов группы G с дефектной группой D_α. Применяя лемму 8, получаем, что число блоков дефекта d группы G не превосходит числа не нильпотентных p-регулярных классов группы G с тем же дефектом.

Теорема 1 является усилением теоремы Брауэра и Несбитт [см. 7].

Следствие 2. Если число блоков группы G совпадает с числом не нильпотентных p-регулярных классов группы G, то число блоков группы G дефекта d совпадает с числом p-регулярных не нильпотентных классов дефекта d группы G.

Доказательство. Пусть u_d — число блоков дефекта d группы G; w_d — число не нильпотентных p-регулярных классов дефекта d группы G. Тогда, в силу теоремы 1,

$$u_d \leqslant w_d. \tag{4}$$

По условию

$$u_d - w_d = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq d}}^{a} (w_i - u_i). \tag{5}$$

На основании (4), из (5) получаем:

$$u_d - w_d \geqslant 0. \tag{6}$$

Сравнивая (4) и (6), получаем: $u_d = w_d \quad (d = 0, \ldots, a)$.

Теорема 2. [см. 6]. *Пусть G — группа порядка $p^a q$, $(p, q) = 1$, содержащая нормальный делитель T порядка $p^\gamma q$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant a)$, силовская p-подгруппа которого является нормальным делителем T. Тогда число блоков B_τ группы G равно числу классов сопряженных элементов группы G, расположенных в максимальном нормальном делителе Q группы G, порядок которого взаимно прост с p и совпадает с числом не нильпотентных p-регулярных классов группы G.*

Используя теорему 2 и следствие 2, получаем:

Следствие 3. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда число блоков дефекта d группы G совпадает с числом p-регулярных не нильпотентных классов группы G с тем же дефектом.

Следствие 3 является обобщением теоремы Осима [см. 8].

Лемма 9. [см. 4]. *Характер X_i принадлежит блоку B_τ дефекта d группы G тогда и только тогда, когда $\omega_i(k_\alpha) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$ для всех p-регулярных классов K_α с дефектом $t_\alpha < d$ и $\omega_i(k_\gamma) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$ хотя бы для одного p-регулярного класса K_γ дефекта d.*

Теорема 3. *Блоки нулевого дефекта у группы G отсутствуют тогда и только тогда, когда все классы группы G с дефектом нуль нильпотентны.*

Доказательство. Достаточность условия теоремы 3 следует из теоремы 1. Пусть блоки нулевого дефекта отсутствуют. Тогда по лемме 9 все классы нулевого дефекта аннулируются всеми модулярными линейными характерами центра $R(G,\Omega^*)$. Следовательно, все классы нулевого дефекта нильпотентны.

Теорема доказана.

Приводим новое доказательство теоремы Брауэра о числе блоков с максимальным дефектом.

Теорема 4. *Число блоков дефекта a группы G совпадает с числом p-регулярных не нильпотентных классов дефекта a группы G.*

Доказательство. Если S — силовская p-подгруппа порядка p^a группы G, то, на основании теоремы 2, число блоков группы $N(S)$ совпадает с числом не нильпотентных p-регулярных классов группы $N(S)$, которые, ввиду следствия из леммы 3, имеют дефект a. Из той же теоремы 2 вытекает, что все p-регулярные классы группы $N(S)$ с дефектом a не нильпотентны. В силу равенства (2) заключаем, что все p-регулярные классы группы G с дефектом a не нильпотентны и число p-регулярных не нильпотентных классов с дефектом a группы G совпадает с числом p-регулярных не нильпотентных классов группы $N(S)$ с тем же дефектом. Вследствие леммы 5, все блоки $N(S)$ имеют максимальный дефект и, ввиду леммы 8, число блоков $N(S)$ совпадает с числом блоков дефекта «a» группы G.

Теорема доказана.

Заметим, что даже для разрешимой группы G число блоков, вообще говоря, не совпадает с числом p-регулярных не нильпотентных классов.

Рассмотрим группу G 24-го порядка с определяющими соотношениями:

$$a^2 = 1,\ в^2 = 1,\ aв = вa,\ c^3 = 1,\ c^{-1}вc = aв,$$
$$c^{-1}ac = в,\ d^2 = 1,\ d^{-1}ad = a,\ d^{-1}bd = ab,\ d^{-1}cd = c^2.$$

Классы сопряженных элементов группы G:

$$K_0 = \{1\},\ K_1 = \{a,\ b,\ ab\},$$
$$K_2 = \{d,\ ad,\ cd,\ bcd,\ c^2d,\ abc^2d\},$$
$$K_3 = \{c,\ bc,\ abc,\ ac,\ c^2,\ ac^2,\ abc^2,\ bc^2\},$$
$$K_4 = \{bd,\ abd,\ abcd,\ acd,\ ac^2d,\ bc^2d\}.$$

При $p = 3$ классы K_0, K_1, K_2 и K_4 p-регулярны и не нильпотентны, что следует из таблицы умножения элементов k_0, k_1, k_2 и k_4, соответствующих классам K_0, K_1, K_2 и K_4 (над полем характеристики 3). Для элементов k_0, k_1, k_2 и k_4 имеет место таблица умножения (над полем характеристики 3):

$$k_0k_i = k_i \quad (i = 0, 1, 2, 4);$$
$$k_i^2 = 2k_1 \qquad (i = 2, 4); \qquad k_1k_2 = k_2 + 2k_4;$$
$$k_1k_4 = 2k_2 + k_4; \quad k_2k_4 = k_1.$$

Покажем, что число блоков при $p = 3$ равно 3. Действительно, при $p = 3$ группа G содержит блоки дефекта 0 и 1. Число блоков дефекта 0 совпадает с числом комплексных характеров группы G, степени которых делятся на порядок силовской p-подгруппы группы G. Так как G содержит два комплексных характера, степени которых делятся на 3, то число блоков дефекта 0 равно 2. Группа G содержит один p-регулярный класс дефекта 1; следовательно, на основании теоремы 4 число блоков группы G дефекта 1 равно 1.

Пример показывает, что число блоков для разрешимой группы, вообще говоря, не совпадает с числом классов сопряженных элементов группы G, расположенных в максимальном нормальном делителе группы G, порядок которого взаимно прост с p. Следовательно, теорема 2 для разрешимой группы неверна.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Iizuka, Note on blocks of group characters, Kumamoto, J. Sci., serA, **2**, (1956), 309—321.
2. R. Brauer, On blocks of characters of group finite order, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **32** (1946), 182—186.
3. R. Brauer, Zur Darstellungtheorie der Gruppen endlicher Ordnung, Math. Z., **63** (1956), 407—440.
4. M. Osima, Note on blocks of group characters, Math. J. Okayama Univ., **4** (1955), 175—188.
5. R. Brauer, On the arithmetic in a group ring, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **30** (1944), 109—114.
6. С. Д. Берман і А. А. Бовді, Р-блоки для одного класу скінченних груп, ДАН УРСР, **6** (1958), 606—609.
7. R. Brauer and C. Nesbitt, On the modular characters of groups, Ann. of Math., **42** (1941), 556—590.
8. M. Osima, On primary decomposable group rings, Proc. Phys. Math. Soc. Japan (3), **24** (1942), 1—9.

Поступила 8. V 1959
Москва

Number of blocks of characters of a finite group with a given defect

A. A. Bódi

Summary

R. Brauer's problem of the group-theoretic characteristic of the number of blocks with a given defect is considered in this paper. The following theorems are proved:

Theorem 1. The number of blocks with defect d of a group G does not exceed the number of p-regular non-nilpotent classes with defect d.

The theorem is a reinforcement of a result of Brauer — Nesbitt. An example is given showing that this estimate is not always attained.

Corollary 3. Let G be a finite group of order $p^a q$ $((p, q) = 1$, p is a prime number) containing a normal subgroup H of the order $p^\gamma q$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant a)$, some sylow p-subgroup of which is a normal subgroup of H. Then the number of blocks with defect d coincides with the number of p-regular non-nilpotent classes of G with the same defect.

Theorem 3. There exist no blocks with zero defect in the group G if, and only if, all classes with defect zero are nilpotent.

A new proof is also presented for Brauer's theorem on the number of blocks with a maximum defect.