1961 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. XIII, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Быстро сходящиеся итерационные процессы

А. Н. Шарковский

1. Рассмотрим итерационный процесс, задаваемый функцией $f(x)$, областью определения которой является вещественная ось. Будем считать, что $f(x)$ достаточное число раз дифференцируема.

Как известно, если начальная точка итерации x_0 расположена достаточно близко от притягивающей неподвижной точки α, то $|x_n - \alpha|$, где x_n — n-ая итерация, убывает как геометрическая прогрессия со знаменателем $f'(\alpha)$. Чем меньше $|f'(\alpha)|$, тем скорость сходимости вблизи неподвижной точки будет больше. Если $f'(\alpha) = 0$, то $|x_n - \alpha| = O(|x_0 - \alpha|^{2^n})$, если $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) = 0$, то $|x_n - \alpha| = O(|x_0 - \alpha|^{3^n})$, и т. д. Верно и обратное: если $|x_n - \alpha| = O(|x_0 - \alpha|^{(N+1)^n})$, то $f^{(i)}(\alpha) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $f^{(N+1)}(\alpha) \neq 0$.

Если задан итерационный процесс $f(x)$ с произвольными значениями $f'(x)$ в неподвижных точках, то для любого N его можно преобразовать в итерационный процесс $F(x)$ так, что все неподвижные точки $f(x)$ станут притягивающими и, более того, $|x_n - \alpha|$, где $f(\alpha) = \alpha$, $x_i = F(x_{i-1})$ и x_0 достаточно близко к α, будет порядка $|x_0 - \alpha|^{(N+1)^n}$.

В настоящей работе нас будет интересовать общий вид $F(x)$ как функции x, $f(x)$ и ее производных, а также необходимые и достаточные условия сходимости итерационных последовательностей, определяемых $F(x)$, иными словами, области притяжения притягивающих неподвижных точек*.

2. Начнем с отыскания общего вида $F(x)$, предполагая, что $F(x)$ также достаточное число раз дифференцируема (по крайней мере в некоторой окрестности неподвижных точек $f(x)$).

Очевидно, если $f(x) = x$, то

$$F(x) = x, \tag{а}$$

так как неподвижные точки $f(x)$ являются неподвижными точками $F(x)$, и

$$\frac{d^k F(x)}{dx^k} = 0,\ k = 1, 2, \ldots, N, \tag{б}$$

так как скорость сходимости итерационной последовательности вблизи любой неподвижной точки α процесса $f(x)$ порядка $|x_0 - \alpha|^{(N+1)^n}$.

Положим, $f(x) - x = \varphi(x)$. Функция $\varphi(x)$ в неподвижных точках $f(x)$ обращается в нуль; функция $F(x)$ содержит (явно) $\varphi(x)$** (в противном случае она была бы одной и той же для $f(x)$, отличающихся постоянной). Поэтому естественно в окрестности неподвижных точек $f(x)$ выражение

* Определения основных понятий, встречающихся в этой работе, имеются в [5].
** Необязательно как функцию одного x.

для $F(x)$ искать в виде разложения по степеням $\varphi(x)$. В разложении ограничимся $N+1$ членом, поскольку, как будет видно, только они зависят от условий (*а*) и (*б*).

Итак,

$$F(x) = A_0(x) + A_1(x)\,\varphi(x) + \ldots + A_N(x)\,\frac{\varphi^N(x)}{N!} + r(x)\,\varphi^{N+1}(x), \qquad (1)$$

где $A_i(x)$ есть функции x и производных функции $\varphi(x)$ и подлежат определению.

При каких условиях возможно такое представление, выясним позже.

Так как (*а*) должно иметь место при произвольной $f(x)$ и так как $A_0(x)$ не содержит явно $\varphi(x)$, то $A_0(x) \equiv x$.

Далее имеем

$$\frac{dF(x)}{dx} = 1 + A_1(x)\,\varphi'(x) + \sum_{i=2}^{N} [A'_{i-1}(x) + A_i(x)\,\varphi'(x)]\,\frac{\varphi^{i-1}(x)}{(i-1)!} + r_1(x)\varphi^N(x), \qquad (2)$$

где $r_1(x) = \frac{1}{N!}\,A'_N(x) + (N+1)\,r(x)\,\varphi'(x) + r'(x)\,\varphi(x)$.

Поскольку $\frac{dF(x)}{dx} = 0$, когда $\varphi(x) = 0$, то ввиду произвольности $f(x)$

$$1 + A_1(x)\,\varphi'(x) \equiv 0$$

(с точностью до слагаемых, содержащих $\varphi(x)$).

Так как $\frac{d^2F(x)}{dx^2} = 0$, когда $\varphi(x) = 0$, то

$$A'_1(x) + A_2(x)\,\varphi'(x) \equiv 0$$

и т. д.

Значит,

$$A'_{i-1}(x) + A_i(x)\varphi'(x) \equiv 0 \qquad (3)$$

или

$$A_i(x) = -\frac{1}{\varphi'(x)}\,A'_{i-1}(x),$$

$$A_0(x) = x,\ i = 1, 2, \ldots, N.$$

Функция $r(x)$ не зависит от (*а*) и (*б*) и определяется конкретным видом $F(x)$.

Если $\varphi'(x) \neq 0$, когда $\varphi(x) = 0$, то есть процесс $f(x)$ не содержит кратных неподвижных точек, то, как видно из выражений для $A_i(x)$, наши рассуждения справедливы в некоторой окрестности каждой из неподвижных точек.

Полученные результаты сформулируем в виде следующей

Теоремы 1. *Пусть имеется итерационный процесс, заданный $2N+1$ раз дифференцируемой функцией $f(x)$, причем в неподвижных точках $f'(x) \neq 1$. Тогда итерационный процесс*

$$F(x) = F_N(x) + [f(x) - x]^{N+1}\,r(x), \qquad (4)$$

где $F_N(x) = x + \sum_{i=1}^{N} A_i(x)\,\frac{[f(x)-x]^i}{i!}$ *и* $A_i(x) = -\frac{1}{f'(x)-1}\,A'_{i-1}(x)$,

$A_0(x) = x$, *а* $r(x)$ — *произвольная функция*, $N+1$ *раз дифференцируемая по крайней мере в некоторой окрестности неподвижных точек* $f(x)$, *превра-*

щает неподвижные точки $f(x)$ в притягивающие и такие, что

$$|x_n - \alpha| = O(|x_0 - \alpha|^{(N+1)^n}), \tag{5}$$

где $f(\alpha) = \alpha$, $f'(\alpha) \neq 0$, $x_i = F(x_{i-1})$, x_0 достаточно близко к α (принадлежит ее области притяжения).

И наоборот, всякий итерационный процесс $F(x)$, где $F(x)$ — $N + 1$ раз дифференцируемая (по крайней мере в некоторой окрестности точки α) функция, зависящая от x, $f(x)$ и ее производных, который удовлетворяет (5), в окрестности α всегда представим в виде (4), причем $r(x)$ определяется видом $F(x)$.

Можно отметить, что

$$\frac{dF_N(x)}{dx} = A'_N(x)\, \frac{[f(x) - x]^N}{N!}. \tag{6}$$

Выражение (4) позволяет предлагать различные итерационные методы.

Полагая в (4) $r(x) \equiv 0$, при $N = 1$ получаем метод Ньютона (метод касательных): $F_1(x) = x - \dfrac{f(x) - x}{f'(x) - 1}$.

При $N = 2$ получаем так называемый метод парабол (метод Чебышева):

$$F_2(x) = x - \frac{f(x) - x}{f'(x) - 1} - \frac{[f(x) - x]^2 f''(x)}{2[f'(x) - 1]^3}.$$

Мы видим, что полученные результаты приводят, если не учитывать $r(x)$, к тем же итерационным формулам, что и [1].

Действительно, если $\varphi(x) = f(x) - x$ разлагается в ряд Тейлора около нулей $\varphi(x)$ и $\varphi'(x) \neq 0$, когда $\varphi(x) = 0$, то в некоторой окрестности каждого из нулей $\varphi(x)$ функция $\varphi(x)$ монотонна, и значит, имеет обратную, производные которой совпадают с $A_i(x)$, а ряд

$$x + \sum_{i=1}^{\infty} A_i(x)\, \frac{\varphi^i(x)}{i!},$$

где

$$A_i(x) = -\frac{1}{\varphi'(x)}\, A'_{i-1}(x), \ A_0(x) = x,$$

представляет собой значение функции, обратной $\varphi(x)$, в точке, где $\varphi(x) = 0$ (то есть значение корня $\varphi(x) = 0$), разложенной в ряд Тейлора в точке $\varphi(x)$*.

С помощью дополнительного члена в разложении функции, обратной $\varphi(x)$, по формуле Тейлора легко оценить (см. [1]) погрешность любого итерационного метода типа (4).

По поводу итерационного процесса $F(x)$ заметим еще следующее. Мы видим, что в $F_N(x)$ входят производные $f(x)$ до N-й включительно. Однако используя при построении $F(x)$ функции от функций, можно избежать привлечения производных $f(x)$, начиная со старшей, так, что скорость сходимости будет иметь тот же порядок.

---

* Отметим, что формулы для производных обратной функции естественно использовать для построения коэффициентов обращенного степенного ряда.

Если $y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$,

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + \ldots$$

и $b_i = b_i(a_1 a_2, \ldots)$, то $b_{i+1} = -\dfrac{1}{a_1}\dfrac{d}{d\lambda}\, b_i(a_1, a_2, \ldots)$, считая, что $a_k = a_k(\lambda)$ и $\dfrac{da_k}{d\lambda} = a_{k+1}$.

Например, так как в окрестности неподвижных точек $f(x)$

$$f^{(k)}(x) = \frac{f^{(k-1)}(f(x)) - f^{(k-1)}(x)}{f(x) - x} + O(f(x) - x),$$

то в $F_N(x)$ можно обойтись без $f^{(N)}(x)$ и, в частности, метод парабол даст итерационный процесс

$$F(x) = x - \frac{f(x) - x}{f'(x) - 1} - \frac{[f'(f(x)) - f'(x)]\,(f(x) - x)}{2[f'(x) - 1]^3}.$$

Метод Ньютона приводит в данном случае к методу Эйткена (см. [2], [3])

$$\frac{xf(f(x)) - f^2(x)}{x - 2f(x) + f(f(x))} = x - \frac{(f(x) - x)^2}{x - 2f(x) + f(f(x))},$$

при котором, вообще говоря, не только числитель, но и знаменатель стремится к нулю.

Если имеются два итерационных процесса $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем $f_1(\alpha) = \alpha$, $f_2(\alpha) = \alpha$, то $f'_1(x) = \dfrac{f_1(f_2(x)) - f_1(x)}{f_2(x) - x} + O(f_2(x) - x)$ вблизи α, и мы получаем общий вид метода Эйткена

$$\frac{xf_1(f_2(x)) - f_1(x)\,f_2(x)}{x - f_1(x) - f_2(x) + f_1(f_2(x))}.$$

Построение конкретных итерационных процессов дает широкий простор для фантазии и какие итерационные методы окажутся наиболее удобными практически — трудно сказать.

По-видимому, не хуже метода Ньютона будет «полумодифицированный» метод Ньютона

$$x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} - \frac{\varphi\left(x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}\right)}{\varphi'(x)},$$

который сходится так же быстро, как и метод парабол.

Можно дать многочисленные общие приемы получения быстро сходящихся итерационных процессов (см., например, [4]).

3. Целесообразно получить некоторые характеристики областей притяжения преобразованных итерационных процессов*.

---

* Для метода Ньютона $(F_1(x))$ и метода парабол $(F_2(x))$ можно сразу дать некоторые достаточные условия сходимости итерационной последовательности.

Пусть $f(x) - x = \varphi(x)$. Так как $\dfrac{dF_1(x)}{dx} = \dfrac{\varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)}$, то, если на интервале $[a, b]$ $\varphi''(x)$ не меняет знак и $\varphi(a)\,\varphi(b) < 0$, тот из концов интервала, знак $\varphi(x)$ в котором совпадает со знаком $\varphi''(x)$, принадлежит области притяжения единственной на интервале неподвижной точки.

Это условие сходимости, принадлежащее Фурье, имеет место, как легко убедиться, и для «полумодифицированного» метода Ньютона.

Аналогично, так как $\dfrac{dF_2(x)}{dx} = \dfrac{\varphi^2(x)}{2\varphi'^4(x)}\,(\varphi'(x)\varphi'''(x) + 3\varphi''^2(x))$, то, если $\varphi(a)\varphi(b) < 0$ и на $[a, b]$ $\varphi''(x)$ не меняет знак, $\varphi'(x)$ отлична от нуля и $\varphi'(x)\varphi'''(x) \leqslant 0$, каждая точка интервала, в которой $\dfrac{\varphi(x)\,\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)} > -2$, принадлежит области притяжения неподвижной точки процесса $F_2(x)$.

Последнее требование $\left(\dfrac{\varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)} > -2\right)$ объясняется тем, что итерационный процесс $F_2(x)$, кроме неподвижных точек процесса $f(x)$, содержит дополнительные неподвижные

В [5] на основании полученных там результатов выведены необходимые и достаточные условия сходимости процесса Ньютона. Используя те же результаты, мы получим здесь необходимые и достаточные условия сходимости итерационных процессов, задаваемых функцией $F(x)$.

Теперь нам потребуется только непрерывность $F(x)$ (хотя бы в некоторой окрестности неподвижных точек). Поэтому будем, например, предполагать, что $f^{(N)}(x)$ непрерывна, а $r(x)$ непрерывна всюду, кроме, быть может, точек, где $f'(x) = 1$.

Тогда $F(x)$ всюду, кроме тех точек, где $f'(x) = 1$, будет также непрерывна. Будем считать, что предельные значения $F(x)$ в точках разрыва будут $\pm\infty$ (если $r(x)$ непрерывна, то это всегда так). Поэтому области притяжения неподвижных точек, которые определяются нулями $x - F(F(x))$ и $F(x) - F(F(x))$ (см. [5]), будут лежать в областях непрерывности $F(x)$.

Положим, $f(x) - x = \varphi(x)$, и запишем $F(x)$ в виде

$$F(x) = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}\,\Phi(x), \tag{7}$$

где

$$\Phi(x) = 1 + \sum_{i=2}^{N} \frac{A'_{i-1}(x)\,\varphi^{i-1}(x)}{i!} - \varphi^{N}(x)\,\varphi'(x)\,r(x).$$

Нули $\Phi(x)$ являются неподвижными точками процесса $F(x)$, отличными от неподвижных точек процесса $f(x)$.

Далее находим

$$F(x) - F(F(x)) = \frac{\varphi(F(x))}{\varphi'(F(x))}\,\Phi(F(x)),$$

$$x - F(F(x)) = \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}\,\Phi(x) + \frac{\varphi(F(x))}{\varphi'(F(x))}\,\Phi(F(x)).$$

Так как $\varphi'(x)$, $\varphi'(F(x))$ для x, принадлежащих области притяжения, отличны от нуля, а $\varphi(x)$ и $\varphi(F(x))$ обращаются в нуль только в самих притягивающих неподвижных точках или в точках вырожденных последовательностей, сходящихся к ним, то области притяжения характеризуются нулями функций $\Phi(F(x))$ и $\Phi(x) + \frac{\varphi(F(x))}{\varphi(x)}\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(F(x))}\,\Phi(F(x))$, каждая из которых равна 1, когда $\varphi(x) = 0$*.

Итак, всякий интервал, содержащий неподвижную точку итерационного процесса $f(x)$, на котором

$$\Phi(F(x)) > 0,$$

$$\Phi(x) + \frac{\varphi(F(x))}{\varphi(x)}\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(F(x))}\,\Phi(F(x)) > 0, \tag{8}$$

является областью притяжения этой неподвижной точки как неподвижной точки итерационного процесса $F(x)$.

точки, которые удовлетворяют уравнению $1 + \frac{\varphi(x)\,\varphi''(x)}{2\varphi'^2(x)} = 0$ и могут попасть в интервал $[a, b]$; так как $\frac{dF_2(x)}{dx} > 6$, когда $1 + \frac{\varphi(x)\,\varphi''(x)}{2\varphi'^2(x)} = 0$, то с каждой стороны от неподвижной точки $f(x)$, единственной на $[a, b]$, может быть не более одной неподвижиой точки процесса $F_2(x)$, принадлежащей $[a, b]$.

* Здесь и дальше, если $\varphi(\alpha) = 0$, предполагаем, что $\left.\frac{\varphi(F(x))}{\varphi(x)}\right|_{x=\alpha} = \lim\limits_{x\to\alpha} \frac{\varphi(F(x))}{\varphi(x)}$; предел этот равен нулю.

Можно несколько уточнить требования, предъявляемые к $\varphi(x)$ и $r(x)$ в отношении непрерывности. Используя первое замечание к теореме 1 в [5], где указывается требуемая область непрерывности функции, задающей итерационный процесс, для итерационного процесса $F(x)$, имеющего вид (7), мы, наконец, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть на интервале* $[a_0, b_0]$ *содержится нуль функции* $\varphi(x)$, *на интервале* $[a, b]$, *где* $a = \min[a_0, F(b_0)]$, $b = \max[b_0, F(a_0)]$, *функция* $F(x)$ *непрерывна.*

Для того чтобы интервал $[a, b]$ *был областью притяжения неподвижной точки итерационного процесса* $F(x)$, *то есть чтобы каждая точка интервала порождала сходящуюся к этой неподвижной точке итерационную последовательность, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Phi(F(x)) > 0,$$

$$\Phi(x) + \frac{\varphi(F(x))}{\varphi(x)} \frac{\varphi'(x)}{\varphi'(F(x))} \Phi(F(x)) > 0$$

на всем интервале $[a_0, b_0]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Л. Чебышев, Соч., т. V, Вычисление корней уравнений, 1951, 7—25.
2. А. С. Хаусхолдер, Основы численного анализа, Изд-во ИЛ, 1956, 143—159.
3. И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. II, Физматгиз, 1959, 140—150.
4. Ш. Е. Микеладзе, О некоторых итерациях высших порядков, Сообщ. АН Груз. ССР, 22, № 3, 1959, 257—264.
5. А. Н. Шарковский, Необходимые и достаточные условия сходимости одномерных итерационных процессов, УМЖ, т. XII, № 4, 1960.

Поступила 18. VIII 60 г.
Киев

Rapidly converging iterative processes

A. N. Sharkovsky

Summary

The author shows that every rapidly converging iterative process $F(x)$, constructed by a given iterative process $f(x)$, in a certain vicinity of a stationary point, where $F(x)$ and $f(x)$ are assumed to be sufficiently smooth, can be presented in the form (4).

The necessary and sufficient conditions of convergence of an iterative sequence generated by $F(x)$ are found. It is shown that any interval containing a stationary point of the iterative process $f(x)$, in which (8) occurs, is a region of attraction of this stationary point as a stationary point of the process $F(x)$.