Майе [4], затем она была повторно найдена Калугареано [5]. Однако, без строгого обоснования её частные случаи использовались для решения различных конкретных задач значительно раньше (см., например, [6]); эта нестрогость (в частности, игнорирование рода мероморфной функции) до самого недавнего времени приводила иногда к ошибочным выводам (см., например, [7], [8]).

При доказательстве теоремы использовалась равномерная сходимость ряда в (4) и сходимость (8). То, что ряд (4) получился из разложения именно $f'(z)/f(z)$, несущественно. Это позволяет использовать указанный выше приём для получения других формул.

Так, исходя из разложения (см., например, [9])

$$\frac{\sin xz}{\sin \pi z} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k \sin kx}{z^2 - k^2}, \quad 0 < x < \pi,$$

получаем для рациональной функции $R(z)$ с нулем в ∞ порядка не ниже второго

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}{}' (-1)^j R(j) \sin jx = -\pi \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=c_i} \left\{ R(z) \frac{\sin xz}{\sin \pi z} \right\}$$

и

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}{}' R(j) \sin jx = -\pi \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=c_i} \left\{ R(z) \frac{\sin (x-\pi) z}{\sin \pi z} \right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Титчмарш, Теория функций, М. — Л., ГИТТЛ, 1951, 135.
2. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. I, М., ИЛ, 1958, 390—392.
3. P. Appel, Sur quelques applications de la fonction $\Gamma(x)$ et d'une autre fonction transcendante, C. r. Acad. sci., t. 86, 1878, 953—956.
4. E. Maillet, Sur les fonctions entières et quasi entières, J. math. pures et appl, t. 8, 1902, 329—386.
5. G. Calugaréano, Sur la détermination des valeurs exceptionnelles des fonctions entières et méromorphes d'ordre fini, C. r. Acad. sci., t. 188, 1929, 37—39.
6. Рэлей (Стретт), Теория звука, ГИТТЛ, М., т. I, 1955, 310; т. II, 262.
7. M. R. Speigel, The summation of series involving roots of transcendental equations and related applications, J. appl. phys., vol. 24, № 9, 1953, 1103—1106.
8. G. Kuerti, Comment on «The summation of series involving roots of transcendental equations and related applications», J. appl. phys., vol. 25, № 1, 1954, 133—134.
9. Н. М. Гюнтер, Р. О. Кузьмин, Сборник задач по высшей математике, т. III, М.—Л., 1947, № 641.

Поступила 13. VII 1959 г.
Ужгород

О нестационарных колебаниях нелинейных систем с гироскопическими членами при учете связи с источником энергии малой мощности

В. А. Гробов

Исследованию колебаний нелинейных систем при учете связи с приводом посвящены работы В. О. Кононенко [3], [4]. При рассмотрении колебаний нелинейных систем со многими степенями свободы В. О. Кононенко в работе [4] использует идею квазинормальных координат.

Известно [5], что процесс преобразования к нормальным координатам дифференциальных уравнений гироскопических систем с медленно меняющимися параметрами представляет собой чрезвычайно трудоемкую задачу, доведенную до вычислительных схем лишь для систем с двумя степенями свободы.

В данной заметке излагается приближенный способ исследования нестационарных колебаний в нелинейной системе с гироскопическими членами при учете связи с источником энергии малой мощности, не требующий преобразования уравнений движения к квазинормальным координатам.

Рассмотрим колебательную систему с гироскопическими членами, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и углом собственного вращения φ.

Колебательное движение системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}(\tau)\ddot{q}_j + b_{ij}(\tau)\dot{q}_j + c_{ij}(\tau)q_j\} =$$

$$= \mu Q_i(\tau;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) + \mu F_i(\tau, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}), \qquad (1)$$

коэффициенты которой являются медленно меняющимися функциями времени и удовлетворяют условиям

$$a_{ij}(\tau) = a_{ji}(\tau),\ b_{ij}(\tau) = -b_{ji}(\tau),\ c_{ij}(\tau) = c_{ji}(\tau);$$

μ — малый параметр, указывающий на близость рассматриваемой системы к линейной консервативной.

Вращательное движение системы описывается уравнением

$$J_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mu\Phi(\tau;\ q_1, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n;\ \ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n;\ \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) + \mu\Delta M(\dot{\varphi}), \qquad (2)$$

где J_0 — момент инерции ротора относительно оси вращения, $\Delta M\ (\dot{\varphi})$ — малый избыточный момент привода, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t)$ — переменная угловая скорость ротора. Нелинейные функции μQ_i в уравнении (1) включают в себя малые нелинейные добавки к упругим силам и малые диссипативные силы, функции $\mu F_i\ (\tau, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ представляют малые возмущения, обусловленные, например, статической и динамической неуравновешенностью ротора.

Функция $\mu\Phi(q_1, \ldots; \dot{q}_1, \ldots; \ddot{q}_1 \ldots; \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ учитывает связь колебательного движения с вращательным, то есть возможность перекачки энергии колебаний во вращательное движение.

Влияние колебательного движения на закон изменения угловой скорости становится существенным в тех случаях, когда запас мощности привода или избыточный внешний момент в резонансной зоне мал.

В этих случаях, как видно из уравнения (2), производная $\frac{d\omega}{dt}$ пропорциональна малому параметру, а следовательно, угловая скорость ω является медленно меняющейся функцией времени. Угол собственного вращения является в этом случае квазициклической координатой.

Для решения связанных между собой уравнений (1) и (2) в первом приближении можно воспользоваться методом гармонического баланса [1] и усреднением уравнения вращательного движения по квазициклической координате.

Предполагая, что в исследуемой системе отсутствует внутренний резонанс для уравнений (1) в первом приближении полагаем

$$q_j^{(k)} = a_k \sigma_{jk}(\tau)\, e^{i(\varphi+\psi_k)} + a_k \sigma_{jk}^*(\tau)\, e^{-i(\varphi+\psi_k)}, \tag{3}$$

где a_k и ψ_k амплитуда и фаза одночастотных колебаний, определяемые в первом приближении из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= \mu A_1^{(k)}(\tau, a_k, \psi_k, \omega), \\ \frac{d\psi_k}{dt} &= \lambda_k - \omega + \mu B_1^{(k)}(\tau, a_k, \psi_k, \omega); \end{aligned} \tag{4}$$

$\sigma_{jk} = \dfrac{\bar{\sigma}_{jk} + i\bar{\bar{\sigma}}_{jk}}{2}$ — фундаментальные функции невозмущенной системы, σ_{jk}^* — функции комплексно сопряженные с σ_{jk}, $\tau = \mu t$ — медленное время.

Для определения функций $A_1^{(k)}$ и $B_1^{(k)}$, входящих в уравнения (4), можно воспользоваться уравнением гармонического баланса, которое для гироскопической системы (1) записывается в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ik}^*(\tau)\left\{\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}(\tau)\ddot{q}_j + b_{ij}(\tau)\dot{q}_j + c_{ij}(\tau)q_j] - \right.$$

$$\left. - \mu Q_i(\tau, q_{01}^{(k)}, \ldots, \dot{q}_{01}^{(k)}, \ldots) - \mu F_i(\tau, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})\right\} e^{i\theta_k}\, d\theta_k = 0, \tag{5}$$

где $\theta_k = \varphi + \psi_k$.

Дифференцируя (3) с учетом уравнений (4) и зависимости $\sigma_{ik}(\tau)$ от медленного времени ($\tau = \mu t$) и подставляя полученные выражения $\dot{q}_j^{(k)}$ и $\ddot{q}_j^{(k)}$ в уравнение гармонического баланса (5), получаем после разделения вещественной и мнимой части систему дифференциальных уравнений для определения

$$A_1^{(k)}(\tau, a_k, \psi_k, \omega) \text{ и } B_1^{(k)}(\tau, a_k, \psi_k, \omega):$$

$$m_1^{(k)}(\tau)[\lambda_k(\tau) - \omega(\tau)]\frac{\partial A_1^{(k)}}{\partial\psi_k} - [2m_1^{(k)}(\tau)\lambda_k(\tau) + m_2^{(k)}(\tau)]B_1^{(k)} =$$

$$= -m_3^{(k)}(\tau)a_k + \frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{n}[Q_i + F_i][\bar{\sigma}_{jk}(\tau)\cos\theta_k - \bar{\bar{\sigma}}_{ik}(\tau)\sin\theta_k]\,d\theta_k,$$

$$m_1^{(k)}(\tau)[\lambda_k(\tau) - \omega(\tau)]a_k\frac{\partial B_1^{(k)}}{\partial\psi_k} + [2m_1^{(k)}(\tau)\lambda_k(\tau) + m_2^{(k)}(\tau)]A_1^{(k)} =$$

$$= -\left[\frac{d}{d\tau}(m_1^{(k)}(\tau)\lambda_k(\tau)) + m_3^{(k)}(\tau)\right]a_k -$$

$$-\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{n}(Q_i + F_i)[\bar{\sigma}_{ik}(\tau)\sin\theta_k + \bar{\bar{\sigma}}_{ik}(\tau)\cos\theta_k]\,d\theta_k, \tag{6}$$

где

$$m_1^{(k)}(\tau) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\tau)\sigma_{ik}(\tau)\sigma_{jk}^*(\tau),$$

$$im_2^{(k)}(\tau) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\tau)\,\sigma_{ik}(\tau)\,\sigma^*_{jk}(\tau),$$

$$m_3^{(k)}(\tau) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\tau)\,\frac{d\sigma_{ik}(\tau)}{d\tau}\,\sigma^*_{jk}(\tau) = \bar{m}_3^{(k)}(\tau) + i\bar{\bar{m}}_3^{(k)}(\tau),$$

из которой $A_1^{(k)}$ и $B_1^{(k)}$ определяются как частные периодические по ψ_k решения.

Для нахождения угловой скорости ω из уравнения (2) можно воспользоваться методом возмущений [2], рассматривая ω как суперпозицию плавно меняющегося члена Ω и суммы малых вибрационных членов. Ввиду малости последних в первом приближении можно положить

$$\omega \approx \Omega. \tag{7}$$

Поскольку a_k и ψ_k являются медленно меняющимися функциями времени, то на интервале времени, равном одному периоду, их можно считать постоянными, то есть принять:

$$\dot{q}_j^{(k)} = ia_k\lambda_k\,[\sigma_{jk}(\tau)\,e^{i\theta_k} - \sigma^*_{jk}(\tau)\,e^{-i\theta_k}], \tag{8}$$

$$\ddot{q}_j^{(k)} = -\,a_k\lambda_k^2\,[\sigma_{jk}(\tau)\,e^{i\theta_k} + \sigma^*_{jk}(\tau)\,e^{-i\theta_k}]. \tag{9}$$

Подставляя (8) и (9) в уравнение вращательного движения и усредняя его за время одного периода, получаем

$$J_0\,\frac{d\Omega}{dt} = \mu\tilde{\Phi}(\tau, a_k, \psi_k, \Omega) + \mu\Delta M(\Omega), \tag{10}$$

где символ $\tilde{\Phi}$ означает усредненнсе за период значение функции Φ.

Уравнения (4) и (10) описывают в первом приближении изменение во времени трех взаимосвязанных величин a_k, ψ_k и Ω, характеризующих колебательное и вращательное движение системы. Благодаря тому, что переменные a_k, ψ_k и Ω являются медленно меняющимися функциями времени, численное интегрирование уравнений (4) и (10) не представляет труда. Для этой цели в работе [6] при расчете амплитуд нестационарных колебаний валов турбомашин были использованы електронные модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
2. Н. Н. Боголюбов, Метод возмущений в нелинейной механике, Сб. трудов Ин-та строит. мех. АН УССР, № 14, 1950.
3. В. О. Кононенко, Резонансные колебания вращающегося вала с диском, Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1958.
4. В. О. Кононенко, О резонансных процессах в колебательной системе, содержащей двигатель, Изв. АН СССР, Механика, № 2, 1959.
5. Ю. А. Митропольский, Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Изд. АН УССР, 1955.
6. В. А. Гробов, Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин, Изд. АН СССР, 1961.

Поступила 25. X 1960 г.
Рига