Аналитическая структура решения уравнения интегральных кривых одной системы двух дифференциальных уравнений в некоторых случаях

А. Н. Еругин

Будем называть $T_{2\omega}$-функцией

$$T_{2\omega}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\sin n\frac{\pi}{\omega}t+b_n\cos n\frac{\pi}{\omega}t\right),$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)<+\infty.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x}=y+X,\ \ \dot{y}=Y, \tag{1}$$

где X, Y есть некоторые голоморфные функции x, y, начинающиеся с членов не ниже второго порядка. Составим уравнение

$$y+X=0, \tag{2}$$

решение которого есть $\bar{y}(x)=\sum_{i=2}^{\infty}A_ix^i$. Обозначим

$$f(x)=Y(x,\bar{y}(x))\equiv ax^{\alpha}+\ldots. \tag{3}$$

$$\varphi(x)=\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\Big|_{y=\bar{y}(x)}\equiv bx^{\beta}+\ldots \tag{4}$$

Далее, Ляпунов указывает в зависимости от соотношения между a, b, α, β десять случаев, в которых решает вопрос об устойчивости решения. В двух случаях возникает проблема центра и фокуса, аналогичная той, которая возникает в случае чисто мнимых корней характеристического уравнения. Мы рассмотрим в этих случаях вопрос об аналитической структуре решения.

I. α—нечетное; $a<0$; $\varphi(x)$ не содержит членов порядка ниже $(\alpha+1)2^{-1}$ степени.

Положив $\alpha=2n-1$, преобразуем наши дифференциальные уравнения посредством подстановок [1]

$$\left.\begin{aligned}x&=(-a)^{-(2n-2)^{-1}}x_1,\\ y&=(-a)^{-(2n-2)^{-1}}y_1+\sum_{i=2}^{n}A_ix^i,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$x_1=rCs(\vartheta),\quad y_1=-r^nSn(\vartheta), \tag{6}$$

где $Cs(\vartheta)$ и $Sn(\vartheta)$ есть функции, определяемые уравнениями

$$\frac{dCs(\vartheta)}{d\vartheta}=-Sn(\vartheta),\qquad \frac{dSn(\vartheta)}{d\vartheta}=Cs^{2n-1}(\vartheta) \tag{7}$$

с начальными условиями $Cs(0)=1$, $Sn(0)=0$.

Получим уравнения интегральных кривых системы (1) в виде

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \sum_{i=2}^{\infty} R_i(\vartheta)\, r^i, \tag{8}$$

где R_i есть некоторые $T_{2\omega}$ - функции,

$$\left(\omega = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{n+1}{2n}\right)\right).$$

Будем искать решение уравнения (8) в виде

$$r = C + \sum_{i=2}^{\infty} u_i(\vartheta)\, C^i, \tag{9}$$

где C произвольная постоянная, $u_i(\vartheta)$ есть некоторые 2ω-периодические функции, для определения которых строится бесконечная система дифференциальных уравнений, из которой функции $u_i(\vartheta)$ последовательно все определяются. Могут быть два случая:

1) функции $u_i(\vartheta)$ все получаются периодическими,

2) функции $u_i(\vartheta)$ не все получаются периодическими, первая непериодическая функция $u_m(\vartheta)$ имеет вид

$$u_m(\vartheta) = g\vartheta + U(\vartheta), \text{ где } g = \text{const} \neq 0,$$

а $U(\vartheta)$ есть некоторая 2ω-периодическая функция. В первом случае ряд (9) сходится при достаточно малых C равномерно относительно $\vartheta \in (-\infty, +\infty)$ и дает решение уравнения (8), а во втором случае подстановкой

$$r = z + \sum_{i=2}^{m-1} u_i(\vartheta)\, z^i + U(\vartheta)\, z^m, \tag{10}$$

уравнение (8) приведется к виду

$$\frac{dz}{d\vartheta} = gz^m + \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\vartheta)\, z^{m+i}, \tag{11}$$

где Q_i есть некоторые $T_{2\omega}$-функции. Решение уравнения (11) найдем в виде

$$z = \vartheta_1^{-1}\,[1 + \gamma(\vartheta)], \quad \vartheta_1^{m-1} = g(m-1)\,\vartheta, \tag{12}$$

где $\gamma(\vartheta)$ имеет вид, аналогичный (1.16) [4], или вид, аналогичный (5.1) [2]. Для коэффициентов разложения $\gamma(\vartheta)$ можно найти рекуррентные формулы. Формулы эти громоздки и приводить их мы не будем.

II. β — нечетное; $\alpha = 2\beta + 1$; $b^2 + 4(\beta + 1)\, a < 0$.
Полагая $\alpha = 2n - 1$ и

$$\int_0^{\vartheta} \frac{bSn^2(\vartheta)\, Cs^{n-1}(\vartheta)\, d\vartheta}{\sqrt{-a} + bSn(\vartheta)\, Cs^n(\vartheta)} = \Theta, \tag{13}$$

преобразуем наши дифференциальные уравнения посредством подстановок

$$\left.\begin{aligned} x &= (-a)^{-(2n-2)^{-1}} x_1, \\ y &= (-a)^{-(2n-2)^{-1}} y_1 + \sum_{i=2}^{n} A_i x^i, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$x_1 = \varrho \exp \Theta Cs(\vartheta), \quad y_1 = -\varrho^n \exp n\Theta Sn(\vartheta). \tag{15}$$

Получим уравнение интегральных кривых системы (1) в виде

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \sum_{i=2}^{\infty} P_i(\vartheta)\varrho^i , \tag{16}$$

где P_i есть некоторые $T_{2\omega}$-функции. Уравнение (16) только обозначениями отличается от уравнения (8), и все, что справедливо для уравнения (8), справедливо и для уравнения (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.

2. А. Н. Еругин, Асимптотические разложения решения одного класса систем двух дифференциальных уравнений с голоморфными правыми частями, Изв. АН БССР, серия физ.-техн. наук, № 1, 1960.

3. А. Н. Еругин, Рекуррентные формулы асимптотических разложений интегральных кривых вблизи фокуса, Изв. АН БССР, серия физ.-техн. наук, № 2, 1960.

4. А. Н. Еругин, Структура явного решения уравнения интегральных кривых одного класса систем двух дифференциальных уравнений с неголоморфными правыми частями, Изв. АН БССР, серия физ.-техн. наук, № 4, 1958.

Поступила 21/XII 60 г.
Ленинград