О разложимости S_p и W_p почти периодических функций в конечные суммы таковых

А. С. کованько

В статье [1] рассмотрен вопрос о разложении почти периодической функции Бора в конечную сумму таковых соответствующим разбиением ее ряда Фурье на отдельные ряды, обладающие самостоятельными спектрами, имеющими попарно непересекающиеся базисы.

В настоящей статье мы решаем аналогичную задачу для S_p и W_p почти периодических функций [2].

§ 1. Напомним кратко некоторые обозначения и определения, касающиеся S_p и W_p почти периодических функций. Сокращенно будем писать $S_p\,\overline{n}\,\overline{n}$ и $W_p\overline{n}\,\overline{n}$. Рассмотрим следующую метрику в пространстве L_p функций, определенных на $(-\infty < x < +\infty)$.

$$D_{S_p}^{lE}\{f(x), \varphi(x)\} = \sup_{-\infty<x<+\infty}\left\{\frac{1}{l}\int\limits_{E(x,x+l)} |f(t)-\varphi(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1).$$

Если $E = (-\infty < x < +\infty)$, то метрику запишем так:

$$D_{Sp}^{l}\{f(x), \varphi(x)\}.$$

Введем еще следующую величину плотности множества (плотность по Степанову):

$$\delta_S^l E = D_{S_1}^l\{1, 0\} = \sup_{-\infty<x<+\infty}\frac{|E(x, x+l)|}{l}.$$

A) ***$S_p\overline{n}\,\overline{n}$ функции***. Определение [2]. $f(x) \in S_p\overline{n}\,\overline{n}\,(p \geq 1)$, $(-\infty < < x < +\infty)$, *если как бы мало ни было* $\varepsilon > 0$ *и какого бы ни было* $l > 0$, *существует относительно плотное множество почти периодов* $\tau = \tau(\varepsilon, l)$ *таких, что*:

$$D_{S_p}\{f(x+\tau), f(x)\} < \varepsilon. \tag{1}$$

Отметим следующие свойства $S_p\overline{n}\ \overline{n}$ функций:

1) каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $l > 0$,
существует такое $d > 0$ $(d < 1)$, что

$$D_{S_p}^{lE}\{f(x), 0\} < \varepsilon, \tag{2}$$

если $\delta_S^l E < d$;

2) существует такое $\eta > 0$, что

$$D_{S_p}^{l}\{f(x+h), f(x)\} < \varepsilon, \tag{3}$$

если $|h| < \eta$.

Напомним теперь условия компактности системы $S_p\overline{n}\ \overline{n}$ функций.

Теорема I [3]. *Система $S_p\overline{n}\ \overline{n}$ функций компактна в смысле метрики $D_{S_p}^l$, если выполнены следующие достаточные (они же необходимые) условия: каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $l > 0$,*

a) существует такое $d > 0$ $(d < 1)$, что

$$D_{S_p}^{lE}\{f(x), 0\} < \varepsilon, \text{ если } \delta_S^l E < d$$

для всех функций $f(x)$ нашей системы;

b) существует такое $\eta > 0$, что для всех функций системы выполняется неравенство $D_{S_p}^l\{f(x+h), f(x)\} < \varepsilon$, если $|h| < \eta$;

c) существует относительно плотное множество почти периодов $\tau = \tau(\varepsilon, l)$, общих всем функциям $f(x)$ нашей системы, то есть

$$D_{S_p}^l\{f(x+\tau), f(x)\} < \varepsilon.$$

B) **$W_p\overline{n}\,\overline{n}$ функции**. Определение [2]. $f(x) \in W_p\overline{n}\,\overline{n}$ $(p \geq 1)$, $(-\infty < x < +\infty)$, *если как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $l_0 = l_0(\varepsilon) > 0$ и относительно плотное множество почти периодов $\{\tau = \tau(\varepsilon)\}$ таких, что*

$$D_{S_p}^l\{f(x+\tau), f(x)\} < \varepsilon, \tag{4}$$

если $l > l_0$.

Напомним следующие свойства $W_p\overline{n}\,\overline{n}$ функций.

Каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

1) существует такое $d > 0$ $(d < 1)$ и $l_0 > 0$, что

$$D_{S_p}^{lE}\{f(x), 0\} < \varepsilon, \tag{5}$$

если $\delta_S^l E > d$ и $l \geq l_0$;

2) существует такое $\eta > 0$ и $l_0 > 0$, что

$$D_{S_p}^l\{f(x+h), f(x)\} < \varepsilon, \tag{6}$$

если $|h| < \eta$ и $l \geq l_0$.

Определение [4]. *Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ сходится D_{W_p}-равномерно к $f(x)$, если как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $l_0 = l_0(\varepsilon) > 0$, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} D_{S_p}^l\{f(x), f_n(x)\} < \varepsilon, \quad \text{если } l > l_0.$$

Теорема II [4]. *Система $\{f(x) \in W_p\overline{n}\,\overline{n}\}$ функций компактна в смысле D_{W_p}-равномерной сходимости, если выполняются следующие достаточные условия:*

как бы мало ни было $\varepsilon > 0$,

α) *существует такое* $d > 0$ $(d < 1)$ *и* $l_0 > 0$, *что*

$$D^{lE}_{S_p}\{f(x), 0\} < \varepsilon, \text{ если } \delta^l_S E < d \text{ и } l \geqq l_0$$

для всех функций $f(x)$ *нашей системы;*

β) *существует такое* $\eta > 0$ *и* $l_0 > 0$, *что*

$$D^l_{S_p}\{f(x+h),\ f(x)\} < \varepsilon, \text{ если } |h| < \eta \text{ и } l \geqslant l_0;$$

γ) *существует общее относительно плотное множество почти периодов* $\{\tau(\varepsilon)\}$ *для всех функций* $f(x)$ *нашей системы, то есть*

$$D^l_{S_p}\{f(x+\tau),\ f(x)\} < \varepsilon \quad \text{для } l \geqq t_0.$$

C) ***Ряд Фурье, спектр, базис, полиномы Бохнера—Фейера для*** $S_p\overline{n}\,\overline{n}$ ***и*** $W_p\overline{n}\,\overline{n}$ ***функций.*** Напомним следующие свойства (общеизвестные) для $S_p\overline{n}\,\overline{n}$ и $W_p\overline{n}\,\overline{n}$ функций.

1) Существует среднее значение

$$A(\lambda) = M_t\{f(t)\,e^{-i\lambda t}\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{a-T}^{a+T} f(t)\,e^{-i\lambda t}dt.$$

Предел имеет место равномерно относительно a на $(-\infty < a < +\infty)$ при любом действительном λ.

2) Множество значений λ, для которых $A(\lambda) \neq 0$, есть максимум счетное. Это множество называется спектром $f(x)$, а соответствующие значения $A(\lambda)$ — коэффициентами Фурье от $f(x)$. Ряд $f(x) = \sum\limits_{(\lambda)} A(\lambda)\,e^{i\lambda x}$ называется рядом Фурье.

3) Базисом спектра $\{\lambda\}$ называется конечное или счетное множество таких чисел α_i (вообще иррациональных), что любое число λ есть линейное сочетание конечного числа из величин α_i с рациональными коэффициентами, при этом все α_i линейно независимы, то есть не существует тождеств $\sum\limits_{(i)} c_i\alpha_i \equiv 0$ с рациональными c_i, отличными от нуля.

4) Системой полиномов Бохнера — Фейера называется система всевозможных полиномов вида:

$$\sigma^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}_{n_1n_2\ldots n_k}(x) = \sum_{\nu_1=-n_1}^{\nu_1=+n_1}\cdots\sum_{\nu_k=-n_k}^{\nu_k=+n_k}\left(1-\frac{|\nu_1|}{n_1}\right)\cdots\left(1-\frac{|\nu_k|}{n_k}\right)\times$$

$$\times A(\nu_1\alpha_1+\ldots+\nu_k\alpha_k)\,e^{i(\nu_1\alpha_1+\ldots+\nu_k\alpha_k)x} = M_t\{f(x+t)\,N^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{n_1\ldots n_k}(t)\}.$$

Здесь

$$N^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{n_1\ldots n_k}(t) = \prod_{j=1}^{j=k}\left[\sum_{\nu_j=-n_j}^{\nu_j=+n_j}\left(1-\frac{|\nu_j|}{n_j}\right)e^{-i\nu_j\alpha_j t}\right] > 0$$

называется ядром данного полинома. Имеет место равенство (обозначения, введенные выше): $M_t\{N^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{n_1\ldots n_k}(t)\} = 1$.

5) Надлежащим подбором последовательности значений $n_1\ldots n_k$ всегда возможно из системы полиномов Бохнера — Фейера выделить последовательность таковых, которая сходится к $f(x)$ в смысле метрики $D^l_{S_p}$ или в смысле D_{W_p}-равномерной сходимости соответственно тому, будет ли

$f(x) \in S_p\overline{n}\,\overline{n}$ или $f(x) \in W_p\overline{n}\,\overline{n}$; обозначим эту последовательность так:

$$\{\sigma_n(x)\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

§ 2. Переходим теперь к основному вопросу нашей статьи. Пусть оказалось, что спектр $f(x)$ распадается на две части, каждая из которых имеет свой самостоятельный базис, причем эти два базиса не пересекаются между собой, то есть не имеют общих элементов.

Обозначим через β_j числа первого базиса, а через γ_j — числа второго базиса. Соответственно двум данным базисам ядро $N(t)$ распадается в сумму двух ядер: $N_1(t)$ и $N_2(t)$. За отсутствием возможной редукции легко проверить, что

$$M_t\{N_1(t)\} = 1 \text{ и } M_t\{N_2(t)\} = 1.$$

Соответственно этому и каждый полином $\sigma^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{n_1\ldots n_r}(x)$ распадается в сумму двух полиномов

$$\sigma^{\beta_1\ldots\beta_l}_{m_1\ldots m_l}(x) = M_t\{f(x+t)\,N_1(t)\},$$

$$\sigma^{\gamma_1\ldots\gamma_r}_{p_1\ldots p_r}(x) = M_t\{f(x+t)\,N_2(t)\}.$$

Применяя неравенство Гельдера к правым частям последних формул, получаем (для 1-го равенства)

$$|\sigma^{\beta_1\ldots\beta_l}_{m_1\ldots m_l}(x)| \leqslant M_t\{|f(x+t)|\,N_1(t)\} \leqslant$$

$$\leqslant [M_t\{|f(x+t)|^p N_1(t)\}]^{\frac{1}{p}}\,[M_t\{N_1(t)\}]^{\frac{p-1}{p}}.$$

Возводя обе части последнего неравенства в степень p и усредняя по множеству $E(x, x+l)$, а затем возводя обе части полученного неравенства в степень $\dfrac{1}{p}$, получаем:

$$D^{lE}_{S_p}\{\sigma^{\beta_1\ldots\beta_l}_{m_1\ldots m_l}(x), 0\} \leqslant D^{lE}_{S_p}\{f(x), 0\}.$$

Аналогичное неравенство получаем для $\sigma^{\gamma_1\ldots\gamma_r}_{p_1\ldots p_r}(x)$.

Таким образом, мы пришли к неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} &D^{lE}_{S_p}\{\sigma^{\beta_1\ldots\beta_l}_{m_1\ldots m_l}(x), 0\} \leqslant D^{lE}_{S_p}\{f(x), 0\},\\ &D^{lE}_{S_p}\{\sigma^{\gamma_1\ldots\gamma_r}_{p_1\ldots p_r}(x), 0\} \leqslant D^{lE}_{S_p}\{f(x), 0\}\end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Заменяя в них $f(x)$ на $f(x+a) - f(x)$, легко получаем такие неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &D^{l}_{S_p}\{\sigma^{\beta_1\ldots\beta_l}_{m_1\ldots m_l}(x+a),\ \sigma^{\beta_1\ldots\beta_l}_{m_1\ldots m_l}(x)\} \leqslant D^{l}_{S_p}\{f(x+a),\ f(x)\}\\ &D^{l}_{S_p}\{\sigma^{\gamma_1\ldots\gamma_r}_{p_1\ldots p_r}(x+a),\ \sigma^{\gamma_1\ldots\gamma_r}_{p_1\ldots p_r}(x)\} \leqslant D^{l}_{S_p}\{f(x+a),\ f(x)\}\end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Выбор сходящейся последовательности $\sigma_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ (см. § 1) вызывает соответствующий выбор последовательностей из $\sigma^{\beta_1\ldots\beta_l}_{m_1\ldots ml}(x)$ и $\sigma^{\gamma_1\ldots\gamma_r}_{p_1\ldots p_r}(x)$, которые обозначим соответственно через $\{\sigma^{(1)}_n(x)\}$ и $\{\sigma^{(2)}_n(x)\}$. Тогда формулы (7) и (8), примененные к этим последовательностям, соответственно дадут:

$$D^{lE}_{S_p}\{\sigma^{(i)}_n(x),\ 0\} \leqslant D^{lE}_{S_p}\{f(x), 0\} \qquad (i = 1, 2), \tag{9}$$

$$D^l_{S_p}\{\sigma_n^{(i)}(x+a),\ \sigma_n^{(i)}(x)\}\leqslant D^l_{S_p}\{f(x+a),\ f(x)\}\ (i=1,2). \tag{10}$$

Рассмотрим теперь отдельно случай $f(x)\in S_p\overline{\overline{nn}}$ и случай $f(x)\in W_p\overline{\overline{nn}}$.

А. ***Случай*** $S_p\overline{\overline{nn}}$ ***функции***. Пусть $f(x)\in S_p\overline{\overline{nn}}$, тогда, задав ε и l, подбираем такое $d>0$, чтобы выполнилось неравенство (2), когда $\delta^l_S E<d$, а затем подберем $\eta>0$ так, чтобы выполнялось неравенство (3), когда $|h|<\eta$. Используем также определение $S_p\overline{\overline{nn}}$ функции (см. § 1). Соответственно всему этому в силу неравенств (9) и (10) придем к неравенствам

$$D^{lE}_{S_p}\{\sigma_n^{(i)}(x),0\}<\varepsilon, \tag{11}$$

если

$$\delta^l_S E<d,$$

и

$$D^l_{S_p}\{\sigma_n^{(i)}(x+h),\ \sigma_n^{(i)}(x)\}<\varepsilon, \tag{12}$$

если $|h|<\eta$.

$$\text{Наконец, } D^l_{S_p}\{\sigma_n^{(i)}(x+\tau),\ \sigma_n^{(i)}(x)\}<\varepsilon. \tag{13}$$

Но неравенства (11), (12) и (13) являются, соответственно, условиями a, b и c компактности последовательностей $\{\sigma_n^{(i)}(x)\}$ $(n=1,2,3,\ldots;\ i=1,2)$ в смысле метрики $D^l_{S_p}$. Не нарушая общности рассуждений, можем положить, что последовательности $\{\sigma_n^{(i)}(x)\}$ $(n=1,2,3,\ldots;\ i=1,2)$ являются сходящимися (в смысле метрики $D^l_{S_p}$), то есть они являются как раз теми подпоследовательностями, которые мы выделяем как сходящиеся (в силу компактности).

Пусть $\varphi_i(x)$ есть предельная функция последовательности $\{\sigma_n^{(i)}(x)\}$ $(n=1,2,3,\ldots)$. Очевидно, что $\varphi_i(x)\in S_p\overline{\overline{nn}}$. Поскольку $\sigma_n(x)=\sigma_n^{(1)}(x)+\sigma_n^{(2)}(x)$, следует, что $f(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ имеет своим базисом числа β_j, а $\varphi_2(x)$ имеет своим базисом числа γ_j. Таким образом, данная функция $f(x)\in S_p\overline{\overline{nn}}$ разлагается в сумму двух $S_p\overline{\overline{nn}}$ функций соответственно расщемлению ее ряда Фурье в два ряда по указанному выше принципу.

В. ***Случай*** $W_p\overline{\overline{nn}}$ ***функций.*** Пусть $f(x)\in W_p\overline{\overline{nn}}$, тогда, задав $\varepsilon>0$, найдем такие числа $l_0>0$ и $d>0$, что выполнится неравенство (5) при условии, что $\delta^l_S E<d$ и $l>l_0$.

Затем подберем $\eta>0$ так, чтобы выполнялось неравенство (6) при условии, что $|h|<\eta$ и $l\geqslant l_0$. Имеем также неравенство (4) при $l\geqq l_0$.

В силу (9), получим, что

$$D^{lE}_{S_p}\{\sigma_n^{(i)}(x),0\}<\varepsilon, \tag{14}$$

если $\delta^l_S E<d$ и $l\geqslant l_0$.

В силу (10), положив $a=h$ или $a=\tau$, получаем

$$D^l_{S_p}\{\sigma_n^{(i)}(x+h),\ \sigma_n^{(i)}(x)\}<\varepsilon, \tag{15}$$

если $|h|<\eta$ и $l>l_0$, а также

$$D^l_{S_p}\{\sigma_n^{(i)}(x+\tau),\ \sigma_n^{(i)}(x)\}<\varepsilon, \tag{16}$$

если $l\geqslant l_0$.

Но неравенства (14), (15) и (16) являются соответственно условиями α, β и γ компактности последовательностей $\{\sigma_n^{(i)}(x)\}$ $(n=1,2,3,\ldots;\ i=1,2)$ в смысле D_{W_p}-равномерной сходимости. Опять, не нарушая общности, можем предположить, что последовательности $\{\sigma_n^{(i)}(x)\}$ $(i=1,2)$ являются D_{W_p}-равномерно сходящимися. Пусть $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, соответственно — их предельные функции. Имеем, очевидно, что $\psi_i(x) \in W_p\overline{nn}$ и что

$$f(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x).$$

Таким образом, $f(x)$ разложилась в сумму двух $W_p\overline{nn}$ функций соответственно разбиению ее ряда Фурье. Очевидно, что разбиение на две функции обобщается сразу на любое конечное множество функций.

Резюмируя полученные результаты для $S_p\overline{nn}$ и $W_p\overline{nn}$ функций, приходим к следующей основной теореме.

Теорема. *Если* $f(x) \in \begin{cases} S_p\overline{nn} \\ W_p\overline{nn} \end{cases}$, *причем ее спектр может быть расчленен на n спектров, базисы которых попарно не пересекаются, то есть не имеют общих элементов, тогда $f(x)$ распадается в сумму n —* $\begin{cases} S_p\overline{nn} \\ W_p\overline{nn} \end{cases}$ *функций, имеющих данные базисы своими базисами.*

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Ковалько, К вопросу о разложимости почти периодических функций в конечную сумму почти периодических функций, Уч. зап. Львов. ун-та, т. XXII, 5, 1953, 12—16.
2. A. S. Besicowitz, Almost-periodic functions, Cambridge, 1932.
3. A. S. Kovanko, Sur les systèmes compacts de fonctions presque périodiques, généralisées de W. Stepanoff, Мат. сб., т. 9 (51) в. 2, 1941, 389—401.
4. А. С. Ковалько, О компактности систем обобщенных почти периодических функций Вейля, УМЖ, т. V, № 2, 1953, 185—195.

Поступила 21. IV 1960 г.
Львов