

1. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, ГИТТЛ, 1953.

2. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. V, ГИФМЛ, 1959.

Поступила 10. X 1960 г.

Киев

## О решении некоторых задач нестационарной фильтрации при помощи интегратора ЭГДА

В. Т. Черновал

В данной статье излагается методика решения задачи о нестационарной фильтрации на интеграторе ЭГДА с применением непрерывной проводящей среды.

Нестационарная фильтрация [1] описывается уравнением

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{n} \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right], \quad (1)$$

где  $h$  — функция напора,  $x, y$  — координаты произвольной точки в натуре,  $k$  — коэффициент фильтрации,  $n$  — удельный объем пор.

Граничные и начальные условия можно получить из состояния и условий эксплуатации гидросооружения.

Область фильтрации переменная во времени, что обусловлено изменением свободной поверхности (для плоского случая — депрессионной кривой). Уравнение движения депрессионной кривой [3]

$$-\frac{\partial y^*}{\partial t} = \left[ \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial x} \right]_{y=y^*}, \quad (2)$$

где  $y^*$  — ординаты депрессионной кривой, а остальные обозначения те же, что и в уравнении (1).

Перейдем в уравнениях (1) и (2) к безразмерным величинам, для чего положим

$$h = Eu; \quad x = E\xi; \quad y = E\eta; \quad y^* = E\tau; \quad t = \frac{E_n}{k} \tau, \quad (3)$$

где  $E$  — пока произвольная единица длины.

В новых обозначениях уравнения (1) и (2) примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad (4)$$

$$-\frac{\partial \tau^*}{\partial \tau} = \left[ \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \tau^*}{\partial \xi} \right]_{\eta=\tau^*}. \quad (5)$$

Будем решать задачу при следующих начальных и граничных условиях (рис. 1)

$$h|_{t=0} = H_1; \quad h|_{AB} = H_1; \quad h|_{EF} = H_3; \quad h|_{BDE} = y - H_3. \quad (6)$$

Такие граничные условия соответствуют земляной перемычке (рис. 1), у которой высота уровня воды в обоих бьефах равна в начальный момент времени, то есть  $H_1 = H_2$  при  $t = 0$ . Далее уровень  $H_2$  мгновенно снижается до уровня  $H_3$  и таким остается.

Положив разность напоров  $H_1 - H_3$  равной  $E$  и используя соотно-

шения (3), получим безразмерные начальные и граничные условия

$$u|_{\tau=0} = 1; u|_{\substack{AB \\ \tau \neq 0}} = 1; u|_{\substack{EF \\ \tau \neq 0}} = 0; u|_{BDE} = \eta - \frac{1}{E} H_3. \quad (7)$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом смены стационарных состояний. Суть метода состоит в том, что процесс, как непрерывную функцию времени, мы аппроксимируем некоторой кусочно-постоянной функцией времени. То есть получаем процесс постоянным в течение некоторого промежутка безразмерного времени  $\Delta\tau$ .

Таким образом, решение нестационарной задачи может быть сведено к решению некоторого конечного числа  $n$  стационарных задач. Поскольку

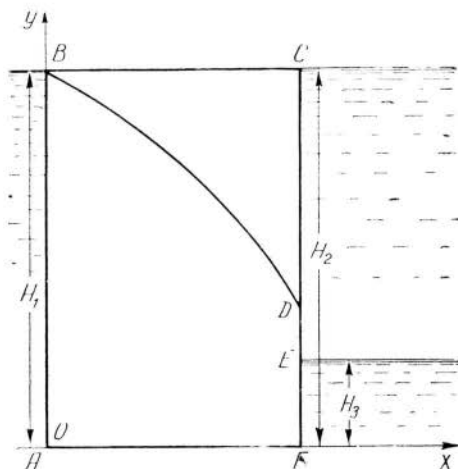


Рис. 1.

напорная функция  $u(\xi, \eta, \tau)$  при  $\tau = \text{const}$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \quad \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \right), \quad (8)$$

то ее распределение в каждом фиксированном состоянии может быть получено известными методами при помощи электро моделирования.

Для нахождения изменяющейся части области фильтрации (депрессионной кривой) представим уравнение (5) в конечно-разностном виде, и, используя  $i$ -е распределение напора и  $i$ -ю депрессионную кривую, найдем  $(i+1)$ -ю.

Однако, как указывают некоторые авторы, определение градиентов при помощи интегратора ЭГДА с применением электропроводной бумаги связано со значительными погрешностями (ввиду относительной неоднородности бумаги), причем погрешность быстро возрастает при уменьшении шага. Увеличение же шага ведет к увеличению погрешности, связанной с самим методом конечных разностей.

Ввиду отсутствия абсолютно однородной бумаги приходится увеличивать шаг разности, а для уменьшения погрешности применять уточненные формулы для определения производной

$$f'(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \left( \Delta f(x_0) - \frac{1}{2} \Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{3} \Delta^3 f(x_0) + \dots \right). \quad (9)$$

Определив новое положение депрессионной кривой, снимаем с модели интересующие нас характеристики (напоры или скорости в заданных точках,

расход и т. п.), соответствующие времени  $\tau_i$  от начала опыта. В случае потребности может быть найдена полная гидромеханическая сетка требуемой точности. Гидромеханическая сетка и положение депрессионной кривой фиксируется либо графически, либо таблично, после чего модель срезается по новой депрессионной кривой, заново задаются соответствующие граничные условия, и весь процесс повторяется.

Выполнив конечное число шагов, подойдем достаточно близко к стационарному состоянию депрессионной кривой, которая может быть найдена по известной методике. Стационарному состоянию соответствует  $\tau = \infty$ .

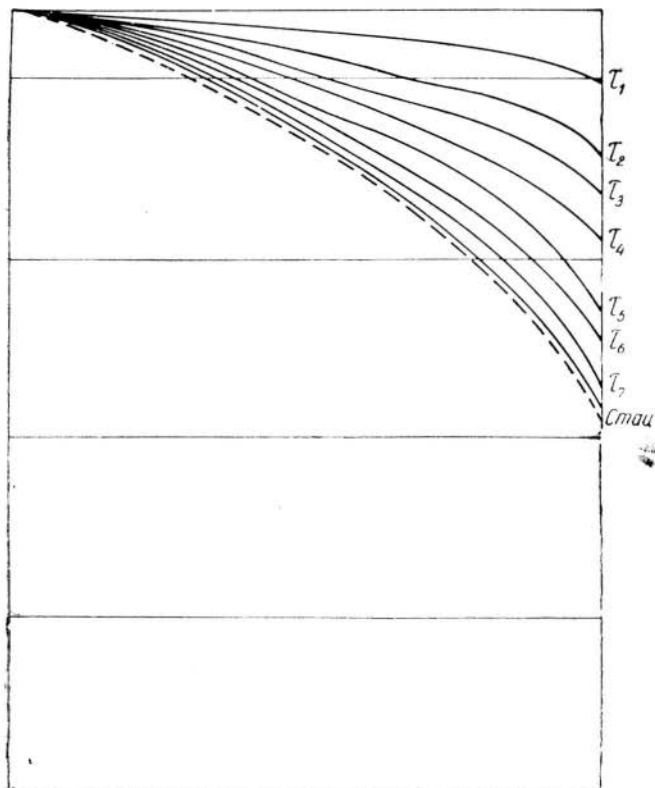


Рис. 2

Результат решения, полученный в безразмерных единицах, легко пересчитать для конкретных  $E$ ,  $h$  и  $n$  на основании соотношений (3).

Для примера применения вышеописанного метода, рассмотрим конкретную задачу о фильтрации воды через земляную перемычку прямоугольной формы (рис. 1) со следующими относительными размерами  $H_1 = H_2 = 1,228E$ ,  $H_2 = 0,228E$  и шириной  $0,890E$ . Размеры взяты пропорциональными размерам соответствующей задачи, рассмотренной в [1] и [2] для удобства сравнения окончательного результата.

Выбрав шаг разности  $\Delta\xi = 0,02$ , снимаем градиенты потенциалов на нулевой депрессионной кривой ( $BC$ ). Производные  $\frac{\partial u}{\partial \xi}$  и  $\frac{\partial \eta^*}{\partial \xi}$  тождественно равны нулю ввиду постоянства по  $\xi$  (при  $\tau = 0$ ) функций  $u(\xi, \eta, \tau)$  и  $\eta^*(\xi, \tau)$ . Уравнение (5) примет вид

$$-\frac{\partial \eta^*}{\partial \tau} = \left[ \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]_{\tau=\tau^*} \quad (10)$$

В формуле (9) ограничимся первыми тремя членами и запишем ее в зависимости не от разностей напоров, а от самих значений напоров через  $\Delta \xi$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{\Delta \xi} \left( \frac{1}{3} u_3 - \frac{3}{2} u_2 + 3u_1 - \frac{11}{6} u_0 \right) = \quad (11)$$

$$= 50 (-1,833u_0 + 3u_1 - 1,5u_2 + 0,333u_3).$$

Измерив потенциалы  $u_i$  и подсчитав  $\Delta \tau_1^*$ , наносим понижение депрессионной кривой на модель и миллиметровую бумагу. Модель срезаем по новому контуру, оставив край для подклейки линейной шины. При решении настоящей задачи оказалось удобным применение бумажной линейной шины, представляющей собой приклеенную по соответствующей границе полоску электропроводной бумаги с малым (в 100—150 раз меньше) удельным сопротивлением. Для обеспечения лучшей линейности на шину в нескольких местах (в нашем случае в 10) подается соответствующий принудительный потенциал.

Такая шина, будучи менее точной, проста в изготовлении и, что особенно важно в данном случае, ее можно, срезая, частично оставлять при модели, а сверху наклеивать новую.

Реализовав для нового контура граничные условия, получаем распределение напора для времени  $\tau_2$ . В этом случае производные, вообще говоря, не равны нулю, и поэтому вычисление ведется по формуле (5).

Выполнив семь раз вышеописанный процесс, мы пришли к решению поставленной нестационарной задачи о фильтрации через земляную перемычку.

Результаты решения сведены в таблице 1 и на графике (рис. 2).

Таблица 1

№	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$\tau_5$	$\tau_6$	$\tau_7$	стационар	№
1	0,435	0,431	0,428	0,427	0,425	0,421	0,420	0,419	1
2	0,426	0,422	0,416	0,413	0,407	0,403	0,400	0,399	2
3	0,418	0,414	0,405	0,397	0,388	0,382	0,379	0,375	3
4	0,412	0,404	0,390	0,379	0,366	0,359	0,350	0,342	4
5	0,409	0,396	0,377	0,361	0,343	0,328	0,316	0,300	5
6	0,407	0,374	0,354	0,330	0,296	0,280	0,264	0,239	6
7	0,403	0,365	0,343	0,318	0,280	0,267	0,248	0,220	7
8	0,401	0,355	0,332	0,314	0,267	0,250	0,220	0,204	8

На этом же рисунке нанесена штриховой линией стационарная депрессионная кривая, полученная гидромеханическим путем в работах [1] и [2]. На таблице 2 приведены ординаты стационарной депрессионной кривой, полученные опытным путем и подсчитанные аналитически.

Таблица 2

$\xi$	$\tau_{\text{аналит.}}^*$	$\tau_{\text{эксперим.}}^*$	$\Delta \tau_1^*$	$\xi$	$\tau_{\text{аналит.}}^*$	$\tau_{\text{эксперим.}}^*$	$\Delta \tau_1^*$
0	0,437	0,437	0	0,198	0,335	0,344	0,009
0,022	0,431	0,431	0	0,222	0,318	0,325	0,007
0,061	0,416	0,416	0	0,242	0,297	0,307	0,010
0,087	0,403	0,404	0,001	0,263	0,278	0,285	0,007
0,115	0,389	0,392	0,003	0,277	0,262	0,269	0,007
0,143	0,372	0,378	0,004	0,289	0,247	0,255	0,008
0,172	0,354	0,361	0,007	0,317	0,205	0,203	0,002

Как видим, расхождение стационарных депрессионных кривых по оси  $\eta$  не превышает 0,010 или 2,5%, что по нормали к кривой составляет 0,006 или 1,37%.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. П. Я. Полубаринова — Кочина, Теория движения грунтовых вод, Гос. изд. теоретико-технической литерат., 1952.

2. С. А. Христианович, С. Г. Михлин, Б. Б. Девисон, Некоторые новые вопросы механики сплошной среды, ч. 3, Движение грунтовых вод, Изд. АН СССР, 1938.

3. Heidrich und Desoyer, Hydromechanische Grundlagen für die Behandlung von stationären und instationären Grundwasserströmung, Ing. — Archiv, 1955, 23, 24, 26.

Поступила 20. VIII 1960 г.  
Киев