О двойных дисперсионных соотношениях

О. С. Парасюк

Двойные дисперсионные соотношения, введенные Мандельстамом, находятся в настоящее время в стадии интенсивного изучения. Была сделана, в частности, попытка доказательства двойных дисперсионных соотношений в любом порядке теории возмущений [1]. Однако Наканиши [2] выдвинул против этого доказательства серьезные возражения. Наканиши [3] пришел к этим возражениям, изучая условия*, при которых для функций вида

$$M(s,t)=\int_0^1 dz\int_0^\infty d\alpha\ \frac{\Psi(z,\alpha)}{\alpha-zs-(1-z)t-i\varepsilon} \tag{1}$$

выполняются двойные дисперсионные соотношения:

$$M(s,t)=\int_0^\infty ds'\int_0^\infty dt'\ \frac{\varphi(s',t')}{(s'-s-i\varepsilon)(t'-t-i\varepsilon)}\ . \tag{2}$$

Согласно Наканиши для представимости функции (1) в виде (2) необходимо и достаточно, чтобы весовую функцию $\Psi(z,\alpha)$ представления (1) можно было записать в виде

$$\Psi(z,\alpha)=\int_0^\infty ds'\int_0^\infty dt'\varphi(s',t')\,\delta'(\alpha-zs'-(1-z)t'). \tag{3}$$

При этом, естественно, необходимо на рост весовых функций Ψ и φ, которые по условию являются обобщенными функциями над пространством S Шварца, наложить разумные ограничения. Используя этот результат, Наканиши показал, что если

$$\Psi(z,\alpha)=\delta(\alpha-(1-z)m_2^2-zm_1^2)/f(z),$$

где

$$f(z)=(1-z)m_2^2+zm_1^2-z(1-z)M^2,$$

то для функции (1) представление (2) невозможно в случае, когда

$$|m_1-m_2|<M<m_1+m_2. \tag{4}$$

Этот результат получен довольно сложным способом путем решения интегрального уравнения (3) для неизвестной функции $\varphi(s,t)$.

В настоящей заметке мы дадим другую интерпретацию уравнению (3), что даст возможность не только более просто получить условие (4), но и открывает путь к дальнейшим результатам в этом направлении.

С этой целью обозначим через $\widetilde{\Psi}(z_1,z_2,\tau)$ преобразование Фурье функции $\Psi(z_1,z_2,\alpha)$ по переменной α,

$$\Psi(z_1,z_2,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha\tau}\widetilde{\Psi}(z_1,z_2,\tau)\,d\tau,$$

где

$$\Psi(z_1,z_2,\alpha)=\int_0^\infty ds'\int_0^\infty dt'\varphi(s',t')\,\delta'(\alpha-z_1s'-z_2t') \tag{5}$$

и

$$\Psi(z,1-z,\alpha)\equiv\Psi(z,\alpha). \tag{6}$$

Тогда равенство (3) можно переписать так:

$$\widetilde{\Psi}(z_1,z_2,\tau)=\int_0^\infty ds'\int_0^\infty dt'\varphi(s',t')\,i\tau e^{-i(\tau z_1s'+\tau z_2t')}\,. \tag{7}$$

* Мы пользуемся обозначениями работы [3].

Из уравнений (5) — (7) мы видим, что функция $\tilde{\Psi}(z_1, z_2, \tau)$ обладает следующими свойствами:

1) при вещественных z_1, z_2 она аналитически продолжается по переменной τ в верхнюю или нижнюю полуплоскость в зависимости от знака $\mathrm{Re}\, z_1$ и $\mathrm{Re}\, z_2$;

2) при вещественном $\tau > 0$ функция $\tilde{\Psi}(z_1, z_2, \tau)$ аналитически продолжается в конус

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, z_1 &< 0, \\ \mathrm{Im}\, z_2 &< 0; \end{aligned} \tag{8}$$

3) функция $\dfrac{\tilde{\Psi}(z_1, z_2, \tau)}{i\tau}$ является функцией, зависимой только от переменных τz_1, τz_2.

Совершенно очевидно, что условия 1), 2), 3) могут служить в качестве критериев разрешимости интегрального уравнения (5), а следовательно, и уравнения (3).

В качестве примера рассмотрим случай, когда

$$\begin{gathered} \Psi(z, \alpha) = \delta(\alpha - (1-z) m_2^2 - z m_1^2)/f(z), \\ f(z) = (1-z)\, m_2^2 + z m_1^2 - z(1-z)\, M^2. \end{gathered} \tag{9}$$

В этом случае функция

$$\frac{\tilde{\Psi}(z_1, z_2, \tau)}{i\tau} = \frac{e^{-i\tau(z_2 m_2^2 + z_1 m_1^2)}}{z_1 m_1^2 + z_2 m_2^2 - z_1 z_2 M^2}.$$

В таком виде эта функция не удовлетворяет всем условиям, сформулированным выше. Однако, как это было ясно с самого начала, функция $\tilde{\Psi}(z_1, z_2, \tau)$ не является единственной. Ведь для нашей задачи важна не сама функция, а ее значения на прямой $z_1 + z_2 = 1$. Поэтому можем положить

$$\frac{\tilde{\Psi}(z_1, z_2, \tau)}{i\tau} = \frac{e^{-i\tau(z_1 m_1^2 + z_2 m_2^2)}\,(z_1 + z_2)^2 \tau^2}{\tau^2 \{(z_1 + z_2)\, z_2 m_2^2 + (z_1 + z_2)\, z_1 m_1^2 - z_1 z_2 M^2\}}. \tag{10}$$

Из формулы (10) мы видим, что функция $\tilde{\Psi}(z_1, z_2, \tau)$ будет удовлетворять всем условиям, если выражение $\dfrac{1}{z_1^2 m_1^2 + z_2^2 m_2^2 + z_1 z_2 (m_1^2 + m_2^2 - M^2)}$ будет функцией, аналитической в конусе $\mathrm{Im}\, z_1 < 0$, $\mathrm{Im}\, z_2 < 0$. Очевидно также, что если это выражение будет иметь особенности при $\mathrm{Im}\, z_1 < 0$, $\mathrm{Im}\, z_2 < 0$, то для функции вида (1) при $\Psi(z, \alpha)$ из (9) представление (2) будет невозможным.

Простое исследование системы алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} x_1^2 m_1^2 + x_2^2 m_2^2 + x_1 x_2 (m_1^2 + m_2^2 - M^2) = y_1^2 m_1^2 + y_2^2 m_2^2 + y_1 y_2 (m_1^2 + m_2^2 - M^2), \\ x_1 y_1 m_1^2 + x_2 y_2 m_2^2 + x_1 y_2 (m_1^2 + m_2^2 - M^2) + y_1 x_2 (m_1^2 + m_2^2 - M^2) = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

где $z_1 = x_1 + i y_1$, $z_2 = x_2 + i y_2$ и $y_1 < 0$, $y_2 < 0$ приводят к выводу, что при

$$|m_1 - m_2| < M < m_1 + m_2$$

система имеет вещественные решения, то есть функция (10) не является аналитической в конусе

$$\mathrm{Im}\, z_1 < 0, \quad \mathrm{Im}\, z_2 < 0$$

и представление (2) невозможно.

Мы получим таким образом основной результат работы [3], минуя решение интегрального уравнения (5).

Нам представляется, что предложенный способ нахождения критериев выполнимости двойных дисперсионных соотношений для функций вида (1) представляет определенный интерес. В частности, Наканиши [4] показал недавно, что вертексная функция в любом порядке теории возмущений представима в виде (1). И поэтому возникает естественная задача выяснить, при каких условиях для вертексной функции в любом порядке теории возмущений верно представление (2).

Мы надеемся дать ответ на этот вопрос с помощью приведенных выше соображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. I. Eden, Proof of the Mandelstam Representation for Every Order in Perturbation Theory, Phys. Pev., 121 (1961), 1567—1576.

2. N. Nakanishi, Remarks on Edens «Proof» of the Mandelstam Representation, Progr. Theor. Phys., 25 (1961), 155—156.

3. N. Nakanishi, On the Validity of Multiple Dispersion Representation, Progr. Theor. Phys., 24 (1960), 1275—1295.

4. N. Nakanishi, Validity of the Integral Representations for the Vertex Part in Perturbation Theory, Progr. Theor. Phys., 25 (1961), 296—297.

Поступила 3. V 1961 г.
Киев