К вопросу о численном расщеплении системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

С. Ф. Фещенко, Л. Д. Николенко

Цель данной заметки — предложить метод расчета, позволяющий решить на современных быстродействующих вычислительных машинах задачу асимптотического расщепления системы линейных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau)x, \ \tau = \varepsilon t \tag{1}$$

($\varepsilon > 0$ — малый параметр) на несколько подсистем низшего порядка, минуя определение некоторой части собственных значений матрицы $A(\tau)$.

Как известно, асимптотическими методами решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений занималось много авторов, которыми получен ряд интересных теоретических результатов. Большую библиографию по этому вопросу можно найти в докторской диссертации С. Ф. Фещенко [1] и статье Х. Л. Территтина [2].

Однако, все предлагаемые ранее процессы построения асимптотических решений основываются на предварительном определении всех собственных значений матрицы $A(\tau)$ и вида ее элементарных делителей при любом значении τ, что в случае произвольной матрицы высокого порядка представляет большие вычислительные трудности.

Весьма удобный численный метод расщепления системы (1) на n независимых линейных дифференциальных уравнений первого порядка предложен И. М. Рапопортом [3], для случая различных собственных значений матрицы $A(\tau)$. В процессе счета, выполняемого на быстродействующих вычислительных машинах, легко определяются все изолированные действительные или комплексные собственные значения и соответствующие им собственные векторы.

Однако указанный алгоритм становится мало пригодным, если имеются достаточно близкие или, при некоторых τ, кратные собственные значения.

Излагаемый ниже метод позволяет преобразовать систему (1) следующим образом: выделяется группа независимых дифференциальных уравнений, число которых равно числу изолированных при любом τ собственных значений матрицы $A(\tau)$, и новая система дифференциальных уравнений, порядок которой равен числу всех «плохих» корней характеристического уравнения, то есть числу корней во всех группах близких корней или таких, которые при некоторых значениях τ становятся кратными. В благоприятном случае порядок последней системы может быть значительно ниже порядка исходной.

Предположим, что с помощью алгоритма, указанного в [3], уже определены для различных моментов τ все изолированные собственные значения λ_i $(i = 1, 2, \ldots, m_1)$ матрицы $A(\tau)$, а следовательно, и соответствующий им сомножитель $D_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{m_1} (\lambda - \lambda_i)$ характеристического полинома $D(\lambda)$. Одновременно найдены и соответствующие собственные векторы.

Очевидчо, в данном случае нетрудно определить и второй сомножитель характеристического полинома

$$D_2(\lambda) = \lambda^{m_2} + a_1\lambda^{m_2-1} + \ldots + a_{m_2-1}\lambda + a_{m_2} \quad (m_2 = n - m_1), \tag{2}$$

соответствующий всем «плохим» корням.

Заметим, что $D_2(\lambda)$ можно получить, минуя построение характеристического полинома $D(\lambda)$ исходной матрицы n-го порядка, используя некоторую новую матрицу порядка m_2.

В соответствии с полученным разложением характеристического полинома

$$D(\lambda) = D_1(\lambda)D_2(\lambda) \tag{3}$$

(где $D_1(\lambda)$ и $D_2(\lambda)$ взаимно просты) преобразуем систему (1) с помощью следующей замены переменных

$$x(t) = U_1(\tau, \varepsilon)\xi_1(t) + U_2(\tau, \varepsilon)\xi_2(t), \tag{4}$$

где $U_1(\tau, \varepsilon)$ и $U_2(\tau, \varepsilon)$ — прямоугольные матрицы порядка (n, m_1) и (n, m_2), а $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — векторы порядка m_1 и m_2 соответственно. Преобразование (4) выбирается так, чтобы полученная в результате его система распадалась на две подсистемы

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \Lambda(\tau, \varepsilon)\xi_1, \tag{5}$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = W(\tau, \varepsilon)\xi_2, \tag{6}$$

причем система (5) представляет собой совокупность m_1 независимых уравнений ($\Lambda(\tau, \varepsilon)$ — диагональная матрица порядка m_1), а (6) — система порядка m_2.

Указанный результат будет достигнут, если в качестве матриц $U_i(\tau, \varepsilon)$ $(i = 1, 2)$ взять решения следующих матричных уравнений

$$\varepsilon \frac{dU_1}{d\tau} + U_1(\tau, \varepsilon)\Lambda(\tau, \varepsilon) = A(\tau)U_1(\tau, \varepsilon), \tag{7}$$

$$\varepsilon \frac{dU_2}{d\tau} + U_2(\tau, \varepsilon)W(\tau, \varepsilon) = A(\tau)U_2(\tau, \varepsilon). \tag{7'}$$

Остановимся только на решении уравнения (7′), так как случай (7) подробно описан в [3].

Как обычно, ищем решение $U_2(\tau, \varepsilon)$ системы (7) и матрицу $W(\tau, \varepsilon)$, при которой это решение удовлетворяет уравнению (7), в виде формальных рядов по степеням параметра $\varepsilon > 0$:

$$U_2(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U_2^{(s)}(\tau), \tag{8}$$

$$W(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s W^{(s)}(\tau). \tag{9}$$

Для определения элементов разложений (8), (9) получаем следующие системы алгебраических уравнений

$$A(\tau)U_2^{(0)}(\tau) - U_2^{(0)}(\tau)W^{(0)}(\tau) = 0, \tag{10}$$

$$A(\tau)U_2^{(s)}(\tau) - U_2^{(s)}(\tau)W^{(0)}(\tau) = F_s(\tau), \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где

$$F_s(\tau) = U_2^{(0)}(\tau)W^{(s)}(\tau) + U_2^{(1)}(\tau)W^{(s-1)}(\tau) + \ldots + U_2^{(s-1)}(\tau)W^{(1)}(\tau) + \frac{dU^{(s-1)}}{d\tau}.$$

Изложим теперь способ решения матричных уравнений (10) и (11). Остановимся вначале на решении уравнения (10).

Очевидно, столбцы матрицы $U_2^{(0)}(\tau)$ при любом фиксированном τ представляют собой базис некоторого m_2-мерного инвариантного относительно $A(\tau)$ подпространства, соответствующего всем «плохим» корням характеристического полинома $D(\lambda)$, то есть корням сомножителя $D_2(\lambda)$.

Согласно (3), все наше n-мерное пространство R можно разложить в прямую сумму двух инвариантных относительно $A(\tau)$ подпространств. Это разложение выполняется с помощью операторов $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$, «проекционных» в том смысле, что

$$\begin{gathered} P_1(\tau) + P_2(\tau) = E, \\ P_1(\tau)P_2(\tau) = P_2(\tau)P_1(\tau) = 0, \\ P_k^2(\tau) = P_k(\tau) \quad (k = 1, 2). \end{gathered} \tag{12}$$

Одно из полученных при этом подпространств — $P_1(\tau)\,R$ — является подпространством собственных векторов матрицы $A(\tau)$, соответствующих изолированным собственным значениям, а второе — $P_2(\tau)R$ — подпространством, соответствующим всем «плохим» корням (сомножителю $D_2(\lambda)$). В качестве искомой матрицы $U_2^{(0)}$ мы и возьмем базис этого последнего подпространства.

Построение $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$ можно осуществить следующим образом [4].
В соответствии с (3) справедлива формула

$$\frac{1}{D(\lambda)} = \frac{d_1(\lambda)}{D_1(\lambda)} + \frac{d_2(\lambda)}{D_2(\lambda)}, \tag{13}$$

где $d_1(\lambda)$ и $d_2(\lambda)$ — полиномы степени не выше $m_1 - 1$ и $m_2 - 1$ соответственно.

Согласно этой формуле, получаем матричное тождество

$$E = d_1(A)D_2(A) + d_2(A)D_1(A).$$

Введем обозначения

$$P_1(\tau) = d_1(A)D_2(A), \; P_2(\tau) = d_2(A)D_1(A). \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что операторы $P_k(\tau)$ $(k = 1, 2)$ являются «проекционными» в указанном выше смысле и соответствующие подпространства обладают нужными нам свойствами [4].

Заметим, что на практике можно построить только оператор $P_1(\tau)$, а $P_2(\tau)$ найти из соотношения $P_2(\tau) = E - P_1(\tau)$. Если известны λ_i $(i = 1, 2, \ldots, m_1)$, то при определении $P_1(\tau)$ удобнее исходить не из формулы (13), а из эквивалентной ей

$$\frac{1}{D(\lambda)} = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{c_i}{\lambda - \lambda_i} + \frac{d_2(\lambda)}{D_2(\lambda)},$$

где c_i — константы при фиксированном τ.

Зная $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$, нетрудно определить $U_2^{(0)}(\tau)$. Для этого нужно воспользоваться тем, что оператор $P_1(\tau)$ на любом векторе из искомого подпространства $P_2(\tau)R$ аннулируется (12). Так как оператор $P_1(\tau)$ представляет собой матрицу порядка (n, n), а ранг ее m_1, то система однородных алгебраических уравнений

$$P_1(\tau)X = 0 \tag{15}$$

имеет $n - m_1 = m_2$ линейно независимых решений. Ортонормируем указанные решения и построим из них прямоугольную матрицу. Это и будет наша искомая матрица $U_2^{(0)}$, порядок которой (n, m_2).

Она удовлетворяет условиям:

$$P_1(\tau)U_2^{(0)} = 0,\ U_2^{(0)*}U_2^{(0)} = E,\ P_2U_2^{(0)} = U_2^{(0)}. \tag{16}$$

Теперь нетрудно определить и матрицу $W^{(0)}$.
Согласно (10),

$$W^{(0)}(\tau) = U_2^{(0)*}A(\tau)U_2^{(0)}.$$

Построение решения уравнений (11) при каждом s и фиксированном τ является решением операторных уравнений вида

$$AY - YB = F, \tag{17}$$

которые рассматривались Ю. Л. Далецким. Как следует из работы [5], уравнение (11) при каждом s и фиксированном τ имеет решение

$$U_2^{(s)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}(A - \lambda E)^{-1}F_s(W^{(0)} - \lambda E)^{-1}d\lambda, \tag{18}$$

если ограниченный оператор F_s удовлетворяет условию

$$P_2F_s = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

В формуле (18) мы через Γ_1 обозначили спрямляемую замкнутую дугу, в комплексной плоскости λ содержащую внутри себя все изолированные собственные значения матрицы A и не содержащую «плохих» корней полинома $D(\lambda)$. Решение $U_2^{(s)}$ уравнения (11), согласно (18) и (19), удовлетворяет условиям

$$P_1U_2^{(s)} = U_2^{(s)},\ P_2U_2^{(s)} = 0. \tag{20}$$

Записывая решение (18) в форме, удобной для счета на быстродействующей машине, получаем

$$U_2^{(s)} = d_1(A)\,[A^{m_2-1}F_s + A^{m_2-2}F_sW_1 + A^{m_2-3}F_sW_2 + \ldots +$$
$$+ AF_sW_{m_2-2} + F_sW_{m_2-1}], \tag{21}$$

где

$$W_1 = W^{(0)} + a_1E,$$
$$W_2 = W_1W^{(0)} + a_2E,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$W_{m_2-1} = W_{m_2-2}W^{(0)} + a_{m_2-1}E$$

и коэффициенты a_i совпадают с соответствующими коэффициентами полинома $D_2(\lambda)$ (2).

Решая уравнение (11) с помощью формулы (21), мы предварительно должны на каждом этапе определять $W^{(s)}$ из условия $P_2F_s = 0$, используя соотношения (16) и (20).

Из вышеизложенного ясно, что при расщеплении системы (1) асимптотическим методом можно применить алгоритм, который позволяет выполнить счет на быстродействующих вычислительных машинах.

Заметим в заключение, что по указанной схеме можно произвести расщепление исходной системы (1) на две произвольные подсистемы, если предварительно будет известно соответствующее разложение вида (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Ф. Фещенко, Докторская диссертация, 1950.
2. Х. Л. Территтин, Асимптотическое разложение решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, Математика, ИЛ, 1 : 2, 1957.
3. Б. И. Рабинович, И. М. Рапопорт, О движении твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью, 1960.
4. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, 1953.
5. Ю. Л. Далецкий, Об асимптотическом решении одного векторного дифференциального уравнения, ДАН СССР, т. ХСП, № 5, 1953.

Поступила 20. II 1961 г.
Киев