Об одном методе приближенного решения систем линейных интегральных уравнений

Ю. Д. Соколов

1

Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений второго рода типа Фредгольма

$$y_i(x) = \varphi_i(x) + \lambda \sum_{j=1}^{m} \int_a^b K_{ij}(x, \xi)\, y_j(\xi)\, d\xi \quad (i=1, 2, \ldots, m), \ (b-a=h>0), \quad (1)$$

где λ — отличное от нуля действительное число, а данные функции $\varphi_i(x)$ непрерывны в промежутке $[a, b]$. Относительно ядер $K_{ij}(x, \xi)$ ограничимся предположением, что они удовлетворяют одному из следующих условий.

1) Функция $K_{ij}(x, \xi)$ является ядром первого рода («непрерывным почти всюду»), то есть она ограничена в данной области (при $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant \xi \leqslant b$) и все ее точки разрыва, если таковые существуют, расположены на конечном числе линий, пересекающихся с прямыми, параллельными координатным осям, только в конечном числе точек («линии разрыва 1-го рода»).

2) Функция $K_{ij}(x, \xi)$ является полярным ядром вида

$$K_{ij}(x, \xi) = \frac{\overline{K}_{ij}(x, \xi)}{|x-\xi|^{\beta_{ij}}},$$

где $0 < \beta_{ij} < 1$ и $\overline{K}_{ij}(x, \xi)$ — функция, непрерывная при $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant \xi \leqslant b$. В дальнейшем все переменные, входящие в рассмотрение, будем предполагать действительными.

Применяя для приближенного решения системы (1) метод осреднения функциональных поправок, положим в первом приближении

$$y_{i1}(x) = \varphi_i(x) + \lambda h \sum_j \alpha_{j1} M_{ij}(x), \quad (2)$$

где

$$M_{ij}(x) = \frac{1}{h} \int_a^b K_{ij}(x, \xi)\, d\xi \quad (3)$$

и

$$\alpha_{i1} = \frac{1}{h} \int_a^b y_{i1}(x)\, dx. \quad (4)$$

Подставляя выражение $y_{i1}(x)$ из (2) в (4), получим для определения α_{i1}

систему линейных уравнений

$$\alpha_{i1} = \frac{1}{h}\int_a^b \varphi_i(x)\,dx + \lambda h \sum_j \alpha_{j1} K_{ij}, \tag{4'}$$

где

$$K_{ij} = \frac{1}{h}\int_a^b M_{ij}(x)\,dx = \frac{1}{h^2}\int_a^b dx \int_a^b K_{ij}(x,\xi)\,d\xi. \tag{5}$$

Предполагая, что определитель системы (4′) отличен от нуля:

$$D = D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda h K_{11} & -\lambda h K_{12} & \dots & -\lambda h K_{1m} \\ -\lambda h K_{21} & 1-\lambda h K_{22} & \dots & -\lambda h K_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda h K_{m1} & -\lambda h K_{m2} & & 1-\lambda h K_{mm} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{6}$$

и обозначая через D_{ij} алгебраическое дополнение, соответствующее элементу i-й горизонтали и j-го столбца, из (4′) найдем

$$\alpha_{j1} = \frac{1}{hD}\sum_i D_{ij}\int_a^b \varphi_i(x)\,dx. \tag{7}$$

В n-м приближении положим

$$y_{in}(x) = \varphi_i(x) + \lambda \sum_j \int_a^b K_{ij}(x,\xi)\,[y_{\overline{jn-1}}(\xi) + \alpha_{jn}]\,d\xi =$$

$$= \varphi_i(x) + \lambda \sum_j \int_a^b K_{ij}(x,\xi)\,y_{\overline{jn-1}}(\xi)\,d\xi + \lambda h \sum_j \alpha_{jn} M_{ij}(x), \tag{2_n}$$

где

$$\alpha_{in} = \frac{1}{h}\int_a^b \delta_{in}(x)\,dx\,[\delta_{in}(x) = y_{in}(x) - y_{\overline{in-1}}(x);\quad \delta_{i1}(x) = y_{i1}(x);\quad n = 2, 3\ldots]. \tag{4_n}$$

Так как по (2_n)

$$\delta_{in}(x) = \lambda \sum_j \int_a^b K_{ij}(x,\xi)\,\delta_{\overline{jn-1}}(\xi)\,d\xi + \lambda h \sum_j (\alpha_{jn} - \alpha_{\overline{jn-1}})\,M_{ij}(x), \tag{8}$$

то из (4_n) найдем

$$\alpha_{in} = \frac{\lambda}{h}\sum_j \int_a^b dx \int_a^b K_{ij}(x,\xi)\,[\delta_{\overline{jn-1}}(\xi) - \alpha_{\overline{jn-1}}]\,d\xi + \lambda h \sum_j \alpha_{jn} K_{ij}, \tag{$4'_n$}$$

откуда

$$\alpha_{jn} = \frac{\lambda}{hD}\sum_i D_{ij}\sum_p \int_a^b dx \int_a^b K_{ip}(x,\xi)\,[\delta_{\overline{pn-1}}(\xi) - \alpha_{\overline{pn-1}}]\,d\xi. \tag{7_n}$$

Выражения (8) и (7_n) для $\delta_{in}(x)$ и α_{jn} нетрудно представить в форме, аналогичной (8′), (9′) статьи [1]:

$$\delta_{in}(x) = \lambda \sum_j \int_a^b [K_{ij}(x, \xi) - M_{ij}(x)] [\delta_{j\overline{n-1}}(\xi) - \lambda \sum_p t_{jp} \alpha_{p\overline{n-1}}] \, d\xi + \\ + \lambda h \sum_j \alpha_{jn} M_{ij}(x), \tag{9}$$

$$\alpha_{jn} = \frac{\lambda}{hD} \sum_i D_{ij} \sum_p \int_a^b dx \int_a^b [K_{ip}(x, \xi) - M_{ip}(x)] \times \\ \times \left[\delta_{p\overline{n-1}}(\xi) - \lambda \sum_q t_{pq} \alpha_{q\overline{n-1}}\right] d\xi, \tag{10}$$

где t_{ij} — произвольные параметры.

2

1) В том случае, когда ядра $K_{ij}(x, \xi)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant \xi \leqslant b$ интегрируемы по обоим аргументам, вместе со своими абсолютными значениями, путем рассуждений, совершенно аналогичных приведенным в статье [2], нетрудно убедиться, что в случае системы уравнений (1) будет иметь место достаточное условие сходимости процесса

$$\varepsilon = l \left[L + (1 + lL) \frac{N}{|D|} \right] < 1 \quad (l = |\lambda|), \tag{11}$$

где L и N обозначают соответственно наибольшие из сумм

$$\sum_j L_{ij} \quad \text{и} \quad \sum_i |D_{ij}| \sum_p N_{ip} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m),$$

где

$$L_{ij} = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \int_a^b |K_{ij}(x, \xi)| \, d\xi, \quad N_{ip} = \frac{1}{h} \int_a^b \left| \int_a^b K_{ij}(x, \xi) \, dx \right| d\xi. \tag{12}$$

2) Полагая в формулах (9) и (10) $t_{ij} = hK_{ij}$, запишем их в следующем виде:

$$\Delta_{in}(x) = \delta_{in}(x) - \lambda h \sum_j K_{ij} \alpha_{jn} = \\ = \lambda \sum_j \int_a^b [K_{ij}(x, \xi) - M_{ij}(x)] \Delta_{j\overline{n-1}}(\xi) \, d\xi + \lambda h \sum_j [M_{ij}(x) - K_{ij}] \alpha_{jn}, \tag{13}$$

$$\alpha_{jn} = \frac{\lambda}{hD} \sum_i D_{ij} \sum_p \int_a^b dx \int_a^b [K_{ip}(x, \xi) - M_{ip}(x)] \Delta_{p\overline{n-1}}(\xi) \, d\xi. \tag{14}$$

Пусть при $a \leqslant x \leqslant b$

$$|\Delta_{in}(x)| \leqslant \Delta_n \quad (i = 1, 2, \ldots, m); \quad h |M_{ij}(x) - K_{ij}| \leqslant R_{ij};$$

$$\int_a^b |K_{ij}(x, \xi) - M_{ij}(x)| \, d\xi \leqslant \overline{L}_{ij} \tag{15}$$

и

$$\overline{N_{ip}} = \frac{1}{h} \int_a^b \left| \int_a^b [K_{ip}(x, \xi) - M_{ip}(x)] \, dx \right| d\xi. \tag{15'}$$

Из формулы (14) следует, что

$$|\alpha_{jn}| \leqslant \frac{l}{|D|} \sum_i |D_{ij}| \sum_p \overline{N_{ip}} \Delta_{n-1}. \tag{16}$$

Тогда по формуле (13)

$$|\Delta_{in}(x)| \leqslant l \sum_j \int_a^b |K_{ij}(x,\xi) - M_{ij}(x)| \, |\Delta_{\overline{jn-1}}(\xi)| \, d\xi + lh \sum_j |M_{ij}(x) - K_{ij}| \, |\alpha_{jn}| \leqslant$$

$$\leqslant l \sum_j \overline{L_{ij}} \Delta_{n-1} + \frac{l^2}{|D|} \sum_i R_{ij} \sum_q |D_{qj}| \sum_p \overline{N_{qp}} \Delta_{n-1} =$$

$$= l \left[\sum_j \overline{L_{ij}} + \frac{l}{|D|} \sum_j R_{ij} \sum_q |D_{qj}| \sum_p \overline{N_{qp}} \right] \Delta_{n-1}. \tag{17}$$

Отсюда уже нетрудно убедиться, что достаточным условием сходимости процесса будет

$$\varepsilon_1 < 1, \tag{18}$$

где $\frac{\varepsilon_1}{l}$ обозначает наибольшее из выражений, заключенных в прямые скобки, при $i = 1, 2, \ldots, m$.

3

1) Если все функции $K_{ij}(x, \xi)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant \xi \leqslant b$ интегрируемы по обоим аргументам, вместе со своими квадратами, то и в случае системы (1) будет иметь место достаточное условие А. Ю. Лучки [1] (в соответственно обобщенной форме). В самом деле, возведя обе части равенства (13) в квадрат и проинтегрировав их по аргументу x, получим

$$\Phi_{in} = \int_a^b \Delta_{in}^2(x)\, dx =$$

$$= \lambda^2 \int_a^b \Big\{ \sum_j \int_a^b [K_{ij}(x,\xi) - M_{ij}(x)] \, \Delta_{\overline{jn-1}}(\xi)\, d\xi + h \sum_j [M_{ij}(x) - K_{ij}] \, \alpha_{jn} \Big\}^2 dx. \tag{19}$$

Отсюда, используя неравенство Минковского, найдем

$$\frac{1}{l} \sqrt{\Phi_{in}} \leqslant \sum_j \sqrt{\int_a^b \Big\{ \int_a^b [K_{ij}(x,\xi) - M_{ij}(x)] \, \Delta_{\overline{jn-1}}(\xi)\, d\xi \Big\}^2 dx} +$$

$$+ h \sum_j |\alpha_{jn}| \sqrt{\int_a^b [M_{ij}(x) - K_{ij}]^2 \, dx}.$$

Далее, в силу неравенства Буняковского — Шварца:

$$\frac{1}{l} \sqrt{\Phi_{in}} \leqslant \sum_i \sqrt{\Phi_{\overline{jn-1}} \int_a^b dx \int_a^b [K_{ij}(x,\xi) - M_{ij}(x)]^2 d\xi} +$$

$$+ h \sum_i |\alpha_{jn}| \sqrt{\int_a^b [M_{ij}(x) - K_{ij}]^2 \, dx}. \tag{20}$$

На основании формулы (14)

$$\alpha_{jn}^2 \leqslant \frac{ml^2}{h^2D^2}\sum_i D_{ij}^2\left[\sum_p \int_a^b dx \int_a^b [K_{ip}(x,\xi) - M_{ip}(x)]\,\Delta_{p\overline{n-1}}(\xi)\,d\xi\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m^2l^2}{h^2D^2}\sum_i D_{ij}^2\sum_p\left\{\int_a^b dx \int_a^b [K_{ip}(x,\xi) - M_{ip}(x)]\,\Delta_{p\overline{n-1}}(\xi)\,d\xi\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m^2l^2}{hD^2}\sum_i D_{ij}^2\sum_p \Phi_{p\overline{n-1}}\int_a^b dx \int_a^b [K_{ip}(x,\xi) - M_{ip}(x)]^2\,d\xi.$$

Если наибольшую из величин Φ_{in} обозначим через Φ_n, то отсюда найдем

$$|\alpha_{jn}| \leqslant \frac{ml}{\sqrt{h}\,|D|}\sqrt{\sum_i D_{ij}^2\sum_p \int_a^b dx \int_a^b [K_{ip}(x,\xi) - M_{ip}(x)]^2\,d\xi}\,\sqrt{\Phi_{n-1}}\,. \qquad (21)$$

На основании (21) неравенство (20) примет вид

$$\frac{1}{l}\sqrt{\frac{\Phi_{in}}{\Phi_{\overline{n-1}}}} \leqslant \sum_j \sqrt{\int_a^b dx \int_a^b [K_{ij}(x,\xi) - M_{ij}(x)]^2\,d\xi} +$$

$$+\frac{ml\sqrt{h}}{|D|}\sum_j \sqrt{\int_a^b [M_{ij}(x) - K_{ij}]^2\,dx}\,\times$$

$$\times\sqrt{\sum_q D_{qj}^2\sum_p \int_a^b dx \int_a^b [K_{qp}(x,\xi) - M_{qp}(x)]^2\,d\xi}$$

или, принимая во внимание, что

$$\int_a^b dx \int_a^b [K_{ij}(x,\xi) - M_{ij}(x)]^2\,d\xi = I_{ij}^2 - J_{ij}^2;$$

$$h\int_a^b [M_{ij}(x) - K_{ij}]^2\,dx = J_{ij}^2 - h^2K_{ij}^2, \qquad (22)$$

будем иметь

$$\sqrt{\frac{\Phi_{in}}{\Phi_{\overline{n-1}}}} \leqslant l\sum_j \sqrt{I_{ij}^2 - J_{ij}^2} +$$

$$+\frac{ml^2}{|D|}\sum_j \sqrt{J_{ij}^2 - h^2K_{ij}^2}\sqrt{\sum_q D_{qj}^2\sum_p (I_{qp}^2 - J_{qp}^2)}, \qquad (23)$$

где

$$I_{ij}^2 = \int_a^b dx \int_a^b K_{ij}^2(x,\xi)\,d\xi; \quad J_{ij}^2 = h\int_a^b M_{ij}^2(x)\,dx. \qquad (24)$$

Обозначая через ε_2 наибольшее значение правой части (23) при $i = 1, 2, \ldots, m$, отсюда заключаем, что при условии

$$\varepsilon_2 < 1 \qquad (25)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n = 0$ и по (21) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{jn} = 0$, а тогда и $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{in}(x) = 0$, причем нетрудно убедиться, что отношения $\frac{\sqrt{\Phi_n}}{\varepsilon_2^n}$, $\frac{\alpha_{jn}}{\varepsilon_2^n}$ ограничены, а отношения $\frac{\delta_{in}(x)}{\varepsilon_2^n}$ равномерно ограничены при $n\to\infty$, то есть алгорифм будет сходящимся.

2) Нетрудно, наконец, получить для системы уравнений (1) и достаточное условие сходимости алгорифма, аналогичное условию (22) статьи [3]. В самом деле, введя для упрощения записи обозначение

$$\lambda\sum_j\int_a^b K_{ij}(x,\xi)\,[\delta_{\overline{jn-1}}(\xi)-\alpha_{\overline{jn-1}}+\alpha_{jn}]\,d\xi = P_{in}(x),$$

запишем формулу (8) в виде

$$\delta_{in}(x)-\alpha_{in} = P_{in}(x)-\alpha_{in}.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат и интегрируя по аргументу x, найдем

$$\Phi_{in} = \int_a^b[\delta_{in}(x)-\alpha_{in}]^2\,dx = \int_a^b[P_{in}(x)-\alpha_{in}]^2\,dx =$$

$$= \int_a^b P_{in}^2(x)\,dx - 2\alpha_{in}\int_a^b P_{in}(x)\,dx + h\alpha_{in}^2 = \int_a^b P_{in}^2(x)\,dx - h\alpha_{in}^2 \leqslant$$

$$\leqslant ml^2\int_a^b\Big\{\sum_j\Big[\int_a^b K_{ij}(x,\xi)\,(\delta_{\overline{jn-1}}(\xi)-\alpha_{\overline{jn-1}}+\alpha_{jn})\,d\xi\Big]^2\Big\}\,dx - h\alpha_{in}^2 \leqslant$$

$$\leqslant ml^2\int_a^b\Big\{\sum_j\int_a^b K_{ij}^2(x,\xi)\,d\xi\int_a^b[\delta_{\overline{jn-1}}(\xi)-\alpha_{\overline{jn-1}}+\alpha_{jn}]^2\,d\xi\Big\}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant ml^2\sum_j\Phi_{ij}I_{ij}^2 + ml^2h\sum_j I_{ij}^2\alpha_{jn}^2 - h\alpha_{in}^2.$$

Суммируя по i и обозначая через $\overline{I}^2$ наибольшую из сумм $\sum\limits_i I_{ij}^2$ при $j = 1, 2, \ldots, m$, будем иметь

$$\sum_i\Phi_{in} \leqslant ml^2\overline{I}^2\sum_j\Phi_{\overline{jn-1}} - h\,(1-ml^2\overline{I}^2)\sum\alpha_{jn}^2.$$

Следовательно, при

$$\varepsilon_3 = \sqrt{m}\,l\overline{I} < 1 \tag{26}$$

$\Phi_{in}\to 0$, а так как по формуле (21) $\left(\text{где в выражениях для } \Delta_{in}(x) \text{ положено } t_{pq}=0 \text{ при } q\neq p \text{ и } t_{pp}=\frac{1}{\lambda}\right)$ $\alpha_{jn}\to 0$, то $\delta_{in}(x)\to 0$ при $n\to\infty$, причем отношения $\frac{\sqrt{\Phi_{in}}}{\varepsilon_3^n}$, $\frac{\alpha_{jn}}{\varepsilon_3^n}$ ограничены, а $\frac{\delta_{in}(x)}{\varepsilon_3^n}$ — равномерно ограничены при $n\to\infty$.

4

Пример. Рассмотрим систему двух линейных интегральных уравнений

$$y_1(x) = x\ln\frac{27}{4} + \frac{2}{3}\lambda\int_0^1 y_1(\xi)\,d\xi - \lambda x\int_0^1 y_2(\xi)\,d\xi,$$

$$y_2(x) = 0{,}2 - \ln \sqrt[5]{\frac{27}{4}} + \frac{x}{(x+1)(x+2)} + \ln(x+1) + \lambda \int_0^1 \frac{y_1(\xi)}{(x+\xi+1)^2} d\xi +$$

$$+ \frac{\lambda}{5} \int_0^1 y_2(\xi)\, d\xi. \quad (27)$$

В данном случае

$$M_{11}(x) = \frac{2}{3},\ M_{12}(x) = -x,\ M_{21}(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)},\ M_{22}(x) = \frac{1}{5};$$

$$K_{11} = \frac{2}{3}, \quad K_{12} = -\frac{1}{2}, \quad K_{21} = \ln\frac{4}{3} = c, \quad K_{22} = \frac{1}{5}$$

и

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2}{3}\lambda & \frac{\lambda}{2} \\ -c\lambda & 1 - \frac{\lambda}{5} \end{vmatrix} = 1 - \frac{13}{15}\lambda + \left(\frac{2}{15} + \frac{c}{2}\right)\lambda^2;$$

$$D_{11} = 1 - \frac{\lambda}{5},\ D_{12} = c\lambda,\ D_{21} = -\frac{\lambda}{2},\ D_{22} = 1 - \frac{2}{3}\lambda.$$

Далее,

$$\overline{L}_{11} = \overline{L}_{12} = \overline{L}_{22} = 0; \quad \overline{L}_{21} = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \frac{1}{(x+1)(x+2)[x+1{,}5+\sqrt{(x+1)(x+2)}]} =$$

$$= 3 - 2\sqrt{2};$$

$$R_{11} = R_{22} = 0, \quad R_{12} = \frac{1}{2}, \quad R_{21} = \frac{1}{2} - c; \quad \overline{N}_{11} = \overline{N}_{12} = \overline{N}_{22} = 0,$$

$$\overline{N}_{21} = 2\ln \frac{\sqrt{1+\frac{4}{c}} - 1}{\sqrt{1+\frac{4}{c}} + 1} + \ln 3 + c\left(4 - \sqrt{1+\frac{4}{c}}\right);$$

$$I_{11}^2 = \frac{4}{9}, \quad I_{12}^2 = \frac{1}{3}, \quad I_{21}^2 = \frac{11}{108}, \quad I_{22}^2 = \frac{1}{25}; \quad \overline{I}^2 = \frac{59}{108};$$

$$J_{11}^2 = \frac{4}{9}, \quad J_{12}^2 = \frac{1}{3}, \quad J_{21}^2 = \frac{2}{3} + 2\ln 3 - 4\ln 2, \quad J_{22}^2 = \frac{1}{25}$$

Неравенства (18), (25) и (26) приведут соответственно к условиям

$$-5{,}29\ldots < \lambda < 4{,}23\ldots; \qquad -7{,}918\ldots < \lambda < 5{,}254\ldots;$$

$$|\lambda| < \sqrt{\frac{54}{59}} \approx 0{,}95669.$$

При $\lambda = 1$ система имеет решение $y_1(x) = x + 1, \quad y_2(x) = \ln(x+2)$
При этом значении λ: $\varepsilon_1 = 0{,}19186\ldots; \quad \varepsilon_2 = 0{,}12585\ldots$

В первом приближении будем иметь $y_{11}(x) = \frac{2}{3}\alpha_{11} + \left(\ln\frac{27}{4} - \alpha_{21}\right)x;$

$$y_{21}(x) = 0{,}2 - \ln \sqrt[5]{\frac{27}{4}} + \ln(x+1) + \frac{x+\alpha_{11}}{(x+1)(x+2)} + \frac{\alpha_{21}}{5},$$

причем α_{11} и α_{21} определяются системой уравнений

$$\alpha_{11} = \frac{2}{3}\alpha_{11} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{27}{4} - \alpha_{21}\right); \quad \alpha_{21} = \frac{1}{5}(7\ln 3 - 3\ln 2 - 4) + c\alpha_{11} + \frac{1}{5}\alpha_{21}.$$

Отсюда

$$\alpha_{11} = \frac{0{,}8 + \ln 1{,}5}{\frac{8}{15} + c} \approx 1{,}46826 \text{ (с погрешностью, равной } -2{,}1\%),$$

$$\alpha_{21} = \ln\frac{27}{4} - \frac{2}{3}\alpha_{11} \approx 0{,}93070 \text{ (с погрешностью, равной } +2{,}3\%).$$

Таким образом, первое приближение представится формулами

$$y_{11}(x) = \frac{2}{3}\alpha_{11}(x+1); \quad y_{21}(x) \approx 0{,}00423 + \frac{x+\alpha_{11}}{(x+1)(x+2)} + \ln(x+1). \quad (28_1)$$

Во втором приближении:

$$y_{12}(x) = \frac{2}{3}\alpha_{11}(x+1) + \frac{2}{3}\alpha_{12} - \alpha_{22}x;$$

$$y_{22}(x) \approx 0{,}00423 + \left(1 - \frac{2}{3}\alpha_{11}\right)\ln(x+1) + \frac{2}{3}\alpha_{11}\ln(x+2) +$$

$$+ \frac{\left(1 - \frac{2}{3}\alpha_{11}\right)x + \alpha_{12}}{(x+1)(x+2)} + \frac{\alpha_{22}}{5}$$

и α_{12}, α_{22} определяются из уравнений

$$\alpha_{12} = \frac{2}{3}\alpha_{12} - \frac{\alpha_{22}}{2}; \qquad \alpha_{22} = \frac{\alpha_{11}}{3}(5\ln 3 - 8\ln 2) + c\alpha_{12} + \frac{\alpha_{22}}{5}.$$

Отсюда

$$\alpha_{12} \approx 0{,}03107; \qquad \alpha_{22} \approx -0{,}02072.$$

Следовательно, во втором приближении

$$y_{12}(x) = \frac{2}{3}(\alpha_{11} + \alpha_{12})(x+1);$$

$$y_{22}(x) \approx 0{,}00009 + \frac{\left(1 - \frac{2}{3}\alpha_{11}\right)x + \alpha_{12}}{(x+1)(x+2)} + \left(1 - \frac{2}{3}\alpha_{11}\right)\ln(x+1) +$$

$$+ \frac{2}{3}\alpha_{11}\ln(x+2). \qquad (28_2)$$

Метод последовательных приближений приведет к формулам

$$Y_{10} = x\ln\frac{27}{4}; \qquad Y_{20} = 0{,}2 - \frac{1}{5}\ln\frac{27}{4} + \frac{x}{(x+1)(x+2)} + \ln(x+1);$$

$$Y_{11} = \frac{1}{3}\ln\frac{27}{4} + \frac{4 + 8\ln 3 - 7\ln 2}{5}x; \qquad Y_{21} = \frac{1 + 7\ln 2 - 8\ln 3}{25} -$$

$$- \frac{\left(\ln\frac{27}{4} - 1\right)x + \ln\frac{27}{4}}{(x+1)(x+2)} - \left(\ln\frac{27}{4} - 1\right)\ln(x+1). \qquad (29)$$

Погрешности (в процентах) значений Y_{10}, Y_{20}, Y_{11}, Y_{21}, y_{11}, y_{21}, y_{12}, y_{22} и $\bar{y}_{12}$, $\bar{y}_{22}$ (получаемых из y_{12}, y_{22} при $\alpha_{12} = \alpha_{22} = 0$) сопоставлены в таблице (причем знак (—) указывает на приближение с недостатком, а знак (+) — на приближение с избытком).

x	Погрешности в процентах								
	Y_{10}	Y_{20}	Y_{11}	Y_{21}	$y_{11}=\bar{y}_{12}$	y_{21}	$\bar{y}_{22}$	y_{12}	y_{22}
0,0	—100	—126	—36	—49	—2,1	+6,5	—2,1	—0,05	+0,14
0,5	— 36	— 61	— 4,7	—31	—2,1	+2,0	—0,86	—0,05	+0,04
1,0	— 4,5	— 38	+11	—20	—2,1	+0,92	—0,45	—0,05	+0,02

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ю. Лучка, Достаточное условие сходимости метода осреднения функциональных поправок, ДАН СССР, т. 122, 2, 1958.

2. Ю. Д. Соколов, О методе осреднения функциональных поправок, УМЖ, т. IX, 1, 1957.

3. Ю. Д. Соколов, Об одном методе приближенного решения нелинейных интегральных уравнений с переменными пределами, УМЖ, т. X, 4, 1958.

Поступила 20. XII 1960 г.
Киев

Sur une méthode de la résolution approchée des systèmes d'équations intégrales linéaires

G. Sokoloff

Résumé

L'auteur expose dans cet mémoire l'application de la méthode des corrections fonctionnelles moyennes à la résolution approchée du système d'équations intégrales linéaires de la forme

$$y_i(x) = \varphi_i(x) + \lambda \sum_{j=1}^{m} \int_a^b K_{ij}(x, \xi)\, y_j(\xi)\, d\xi \quad (b - a = h > 0;\ i = 1, 2, \ldots, m). \tag{1}$$

En prenant pour premières valeurs approchées des $y_i(x)$

$$y_{i1}(x) = \varphi_i(x) + \lambda h \sum_j \alpha_{j1} M_{ij}(x) \tag{2}$$

où $$M_{ij}(x) = \frac{1}{h} \int_a^b K_{ij}(x, \xi)\, d\xi, \qquad \alpha_{i1} = \frac{1}{h} \int_a^b y_{i1}(x)\, dx, \tag{3}$$

on pose d'une façon générale

$$y_{in}(x) = \varphi_i(x) + \lambda \sum_j \int_a^b K_{ij}(x, \xi)\, [y_{\overline{jn-1}}(\xi) + \alpha_{jn}]\, d\xi \quad (n = 2, 3, \ldots,) \tag{2_n}$$

où

$$\alpha_{jn} = \frac{1}{h} \int_a^b [y_{in}(x) - y_{\overline{jn-1}}(x)]\, dx. \tag{3_n}$$

Les §§ 2, 3 contiennent quelques conditions suffisantes de convergence du procédé. On donne aussi un exemple de l'application de la méthode.