К теории специальных классов однолистных в единичном круге функций с K-кратной симметрией вращения

И. М. Гальперин

Рассмотрим классы функций:

1. Класс S_k^0 функций

$$f_k(z) = z + a_{k+1} z^{k+1} + \ldots + a_{nk+1} z^{nk+1} + \ldots,$$

однолистных, регулярных в $|z| < 1$ и отображающих круг $|z| < 1$ на выпуклые области.

2. Класс функций $S_k^0 + S_k^*$

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2}[f_k(z) + z f_k'(z)] = z + b_{k+1} z^{k+1} + \ldots + b_{nk+1} z^{nk+1} + \ldots, \quad (1)$$

где $f_k(z) \in S_k^0$.

Теорема 1. *Функции $\Phi_k(z) \in S_k^0 + S_k^*$ однолистны в $|z| < 1$ и допускают одно и только одно представление в виде следующей структурной формулы*

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^z \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu(t)}{1 - \zeta^k e^{-it}} \exp\left[-\frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - \zeta^k e^{-it})\, d\mu(t) \right] \right\} d\zeta, \quad (2)$$

где $\mu(t)$ — неубывающая функция на интервале $(-\pi; \pi)$, нормированная условием

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(t) = 2\pi. \quad (3)$$

Доказательство. Однолистность функций $\Phi_k(z)$ в $|z| < 1$ следует из одной теоремы Рахманова Б. Н. [4]; возможность представить ее формулой (2) следует из соответствующей формулы для функций класса S_k^0 [3].

Теорема 2. *Для функций $\Phi_k(z) \in S_k^0 + S_k^*$ имеют место оценки*

$$|b_{nk+1}| \leqslant \frac{1}{n!} \frac{1}{k} \left(\frac{2}{k} + 1 \right) \left(\frac{2}{k} + 2 \right) \ldots \left(\frac{2}{k} + n - 1 \right) \frac{nk+2}{nk+1}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{(1 + r^k)^{1+\frac{2}{k}}} \leqslant |\Phi_k'(z)| \leqslant \frac{1}{(1 - r^k)^{1+\frac{2}{k}}}, \quad |z| = r, \quad (5)$$

$$\int_0^r \frac{dx}{(1 + x^k)^{1+\frac{2}{k}}} \leqslant |\Phi_k(z)| \leqslant \int_0^r \frac{dx}{(1 - x^k)^{1+\frac{2}{k}}}, \quad |z| = r, \quad (6)$$

$$|\arg \Phi_k'(z)| \leqslant \left(1+\frac{2}{k}\right) \arcsin r^k, \quad |z| = r. \tag{7}$$

Все оценки точные и достигаются функцией

$$\Phi_{k0}(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{(1-\zeta^k e^{-it})^{1+\frac{2}{k}}} \tag{8}$$

этого же класса, причем последняя оценка — вдоль кривой $\cos t = r^k$.

Доказательство. Оценки (4), (5) и (6) очевидны. Первая из них (4) является следствием оценки Голузина Г. М. [1] для коэффициентов функций класса S_k^0, вторая (5) — следствие одной оценки Рахманова Б. Н. [5], третья (6) получается интегрированием (5).

Остановимся подробнее на оценке (7). Из (2), полагая без ограничения общности $\varphi = 0$ $(z = re^{i\varphi})$, находим:

$$I(\mu) = \arg \Phi_k'(z) = \operatorname{arctg} \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^k \sin t\, d\mu(t)}{1-2r^k \cos t + r^{2k}}}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(r^k \cos t - 1)\, d\mu(t)}{1-2r^k \cos t + r^{2k}}} + \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{arctg} \frac{r^k \sin t}{r^k \cos t - 1}\, d\mu(t).$$

Применяя далее к этому функционалу вариационный метод [3] в сочетании с дополнительным кропотливым анализом, идея которого заимствована из работ [7, 8], приходим к оценке (7).

Впрочем, к тому же результату можно прийти и более простым* путем, если использовать одну лемму Зморовича [3], в силу которой

$$\operatorname{arctg}\left(\min_t \frac{r^k \sin t}{r^k \cos t - 1}\right) \leqslant \operatorname{arctg} \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^k \sin t\, d\mu(t)}{1-2r^k \cos t + r^{2k}}}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(r^k \cos t - 1)\, d\mu(t)}{1-2r^k \cos t + r^{2k}}} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{arctg}\left(\max_t \frac{r^k \sin t}{r^k \cos t - 1}\right),$$

а также легко устанавливаемое неравенство

$$\frac{1}{\pi k} \operatorname{arctg}\left(\min_t \frac{r^k \sin t}{r^k \cos t - 1}\right) \leqslant \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{arctg} \frac{r^k \sin t}{r^k \cos t - 1}\, d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi k} \operatorname{arctg}\left(\max_t \frac{r^k \sin t}{r^k \cos t - 1}\right).$$

При $k = 1$ получаем результат Рахманова Б. Н., опубликованный им без доказательства [6].

Пусть теперь $\widehat{S}$ — класс функций

$$g(z) = z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

* Сообщено Лозовиком В. Г.

однолистных с ограниченным вращением в круге $|z|>1$ (о классе $\hat{S}$ подробнее см. [2]).

Покажем, что преобразование

$$g_k(z)=\int\limits_0^z g'(\zeta^k)\,d\zeta$$

переводит класс $\hat{S}$ однолистных функций с ограниченным вращением в класс $\hat{S}_k$ однолистных функций с ограниченным вращением и k-кратной симметрией:

$$g_k(z)=z+d_{k+1}z^{k+1}+\ldots+d_{nk+1}z^{nk+1}+\ldots \tag{9}$$

Действительно, так как $g'(z)$ регулярна в $|z|<1$, то и

$$g'_k(z)=g'(z^k),\ z^k\in|z|<1,\ k\text{ — целое}\geq 1,$$

также регулярна в $|z|<1$, кроме того,

$$\operatorname{Re}g'_k(z)=\operatorname{Re}g'(z^k)>0 \text{ в } |z|<1.$$

Этим все доказано.

Теорема 3. *Для того чтобы функция $g_k(z)$ (9) принадлежала классу $\hat{S}_k$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде следующей структурной формулы*

$$g_k(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{\int\limits_0^z\frac{1+\zeta^k e^{-it}}{1-\zeta^k e^{-it}}\,d\zeta\right\}d\mu(t), \tag{10}$$

где $\mu(t)$ — неубывающая на интервале $(-\pi;\pi)$ функция, нормированная условием (3).

Доказательство теоремы основано на использовании известной теоремы Рисса — Герглотца. Для коэффициентов разложения (9) получаем формулу

$$d_{nk+1}=\frac{1}{(nk+1)\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-int}d\mu(t). \tag{11}$$

Теорема 4. *Для данной целой функции $\Phi(w)$, удовлетворяющей условию $\Phi'(w)\neq 0$, максимум и минимум функционалов*

$$\operatorname{Re}\{\Phi[g'_k(z)]\}_{|z|=r},\ |\Phi[g'_k(z)]|_{|z|=r} \tag{12}$$

при любом фиксированном r, $0<r<1$ в классе $\hat{S}_k$ достигается функцией

$$g_{k0}(z)=\int\limits_0^z\frac{1+\zeta^k e^{-it}}{1-\zeta^k e^{-it}}\,d\zeta \tag{13}$$

этого же класса.

Доказательство. Нетрудно видеть, что теорему достаточно доказать для первого из функционалов (12). Структурная формула (10) дает

$$I(\mu)=\operatorname{Re}\{\Phi[g'_k(z)]\}=\operatorname{Re}\left\{\Phi\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1+z^k e^{-it}}{1-z^k e^{-it}}\,d\mu(t)\right]\right\}.$$

Вычисляя вариацию этого функционала [3], получаем

$$\delta I(\mu)=\frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{\pi}^{\pi}F_\mu(t)\,d\mu(t),$$

где

$$F_\mu(t) = \operatorname{Re}\left[(A_\mu + iB_\mu) \frac{1+z^k e^{-it}}{1-z^k e^{-it}} \right], \tag{14}$$

$$A_\mu + iB_\mu = \Phi'\left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+z^k e^{-it}}{1-z^k e^{-it}} d\mu(t) \right] \neq 0.$$

Функция, стоящая в квадратных скобках (14), однолистна и выпукла в $|z| < 1$, поэтому $F_\mu(t)$ имеет один максимум и один минимум в интервале $(-\pi; \pi)$. Следовательно, [3] экстремизирующая функция $\mu(t)$ при любом фиксированном r, $0 < r < 1$, как в случае максимума, так и в случае минимума функционала $I(\mu)$ является ступенчатой с одной точкой разрыва. Соответствующая функция $g_k(z)$ имеет вид (13).

Теорема 5. *Если $g_k(z) \in \hat{S}_k$, то имеют место оценки: а) на $|z| = r < 1$*

$$\frac{1-r^k}{1+r^k} \leqslant |g_k'(z)| \leqslant \frac{1+r^k}{1-r^k},$$

$$\frac{1-r^k}{1+r^k} \leqslant \operatorname{Re} g_k'(z) \leqslant \frac{1+r^k}{1-r^k},$$

$$|\operatorname{Im} g_k'(z)| \leqslant \frac{2r^k}{1-r^{2k}},$$

$$|\arg g_k'(z)| \leqslant 2 \operatorname{arctg} r^k,$$

$$\int\limits_0^r \frac{1-x^k}{1+x^k} dx \leqslant |g_k(z)| \leqslant \int\limits_0^r \frac{1+x^k}{1-x^k} dx;$$

б) $$|d_{nk+1}| \leqslant \frac{2}{nk+1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Оценки точные и достигаются функцией (13).

Доказательство. Первые четыре оценки из *а*) являются простыми следствиями теоремы 4. Пятая оценка получается интегрированием первой. Оценка *б*) следует из (11) и (3).

Теорема 6. *Если $g_k(z) \in \hat{S}_k$, то для любого $n \geqq 2$ многочлен*

$$S_{(n-1)k+1}(z) = z + d_{k+1} z^{k+1} + \ldots + d_{(n-1)k+1} z^{(n-1)k+1} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

также принадлежит классу $\hat{S}_k$ в круге $|z| \leqslant \sqrt[k]{\frac{1}{2}}$. Константа $\sqrt[k]{\frac{1}{2}}$ не может быть заменена большей, как показывает пример функции (13).

Теорема 7. *Если степенной ряд (9) определяет функцию $g_k(z) \in \hat{S}_k$, то каждый степенной ряд*

$$\varphi_k(z) = z + l_{k+1} z^{k+1} + \ldots + l_{nk+1} z^{nk+1} + \ldots,$$

удовлетворяющий условиям

$$|l_{nk+1}| \leqslant |d_{nk+1}| \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

определяет функцию класса $\hat{S}_k$ в круге $|z| < \sqrt[k]{\frac{1}{3}}$. Константа $\sqrt[k]{\frac{1}{3}}$ не может быть заменена большей.

Доказательства последних двух теорем ничем не отличаются от доказательства соответствующих теорем для функций класса $\hat{S}$ (см. [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Голузин, О некоторых оценках, относящихся к функциям, совершающим однолистное конформное преобразование круга, Матем. сб., т. 36, вып. 2, 1929.
2. И. М. Гальперин, К теории однолистных функций с ограниченным вращением, Изв. высш. уч. зав., Математика, № 3, 1958.
3. В. А. Зморович, О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций, УМЖ, т. IV, № 5, 1952.
4. Б. Н. Рахманов, К теории однолистных функций, ДАН СССР, т. 78, № 2, 1951.
5. Б. Н. Рахманов, Диссертация, 1945.
6. Б. Н. Рахманов, К теории однолистных функций, ДАН СССР, т. 103, № 3, 1955.
7. Б. М. Урузбаев, Об аргументе производной однолистной звездообразной функции, Изв. АН Каз. ССР, № 56, вып. 2, 1948.
8. W. Stroganoff, Über den arc $f'(z)$ unter der Bedingung, dass $f(z)$ die konforme Abbildung eines sternartigen Gebietes auf das Innere des Einheitskreises des z-Ebene liefert, Тр. Физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 5, 1934.

Поступила 16. VII 1959 г.
Киев