Об одном методе построения разностных уравнений при решении методом сеток внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Д. Ф. Давиденко

Рассмотренный в [1] метод построения разностных уравнений при решении методом сеток плоской задачи Дирихле для уравнения Лапласа в настоящей заметке обобщается на случай решения той же задачи для уравнения Пуассона. В частности, строится в случае квадратной сетки с шагом h 9-точечное разностное уравнение, применимое для произвольного узла сеточной области, с погрешностью порядка h^5. Записанное для внутреннего узла, это уравнение совпадает с известным 9-точечным разностным уравнением (см., напр., [3], стр. 227).

Построением разностных уравнений для граничных узлов при решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона занимался Ш. Е. Микеладзе [2]. Им получены разностные уравнения с погрешностью порядка h^3 для любых граничных узлов и порядка h^4 для некоторого типа граничных узлов.

1°. Пусть в области G плоскссти x, y с границей Γ ищется решение $u(x, y)$ уравнения Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \tag{1}$$

удовлетворяющее на границе Γ условию Дирихле. Предположим, что решение $u(x, y)$ указанной задачи и функция $f(x, y)$ обладают в области G непрерывными и ограниченными производными до нужного нам порядка. Покроем область G произвольной сеткой. Произвольный узел сетки будем обозначать через $\alpha_0 = \alpha_0(x_0, y_0)$, а m ближайших к нему узлов — через $\alpha_i = \alpha_i(x_0 + k_i, \ y_0 + l_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, где $k_i. l_i$ — некоторые числа.

Предположим, что решение $u(x, y)$ уравнения Пуассона (1) в окрестности точки α_0 области G можно представить в виде

$$u(x, y) = F(x, y) + a_{0,0}\Phi_0(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n-1,1}\Phi_{2n-1}(x, y) + a_{n,0}\Phi_{2n}(x, y)],$$

где

$$F(x, y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl} (x - x_0)^k (y - y_0)^{l+2},$$

$$c_{kl} = \frac{1}{k!(l+2)!} \sum_{j=0}^{E\left(\frac{l}{2}\right)} (-1)^j \left.\frac{\partial^{k+l} f(x, y)}{\partial x^{k+2j} \partial y^{l-2j}}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}};$$

$\Phi_i(x, y)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — система линейно независимых гармонических функций, удовлетворяющих тем же условиям, что и в [1]; коэффициенты $a_{n,0}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и $a_{n-1,1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определяются из соотношений, аналогичных (3), (4) [4].

Поступая аналогично тому, как это делается в [4], получаем следующее разностное соотношение, построенное по $m+1$ узлам сетки:

$$u(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^{m} b_i u(x_0 + k_i, y_0 + l_i) = \Omega^{(m)}(f) + R_{(0,0)}^{(m)}, \tag{2}$$

где коэффициенты b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ определяются как решение системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \Phi_0(x_0 + k_i, y_0 + l_i) = -1, \quad \sum_{i=1}^{m} b_i \Phi_q(x_0 + k_i, y_0 + l_i) = 0, \; q=1,2,\ldots,m-1,$$

величина $\Omega^{(m)}(f)$ определяется по формуле

$$\Omega^{(m)}(f) = \sum_{i=1}^{m} b_i F(x_0 + k_i, y_0 + l_i),$$

а выражения для $R_{0,0}^{(m)}$ см. в [1].

Порядок малости относительно $k_i l_i$ остаточного члена $R_{0,0}^{(m)}$ будет по крайней мере не ниже $\frac{m}{2}$ в случае m четного и $\frac{m+1}{2}$ в случае m нечетного.

Следует заметить также, что при вычислениях достаточно учитывать в $\Omega^{(m)}(f)$ лишь только те члены, порядки малости которых относительно $k_i l_i$ не превышают в данном узле порядка малости $R_{0,0}^{(m)}$. Тогда порядок малости относительно $k_i l_i$ суммарного остаточного члена R будет в этом узле не ниже порядка малости $R_{0,0}^{(m)}$.

Сумму упомянутых членов из $\Omega^{(m)}(f)$ будем обозначать через $\overline{\Omega}^{(m)}(f)$.

Отбрасывая в разностном соотношении (2) суммарный остаточный член R, представляющий собой величину, малую по сравнению с остальными членами, получаем следующее разностное уравнение

$$u(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^{m} b_i u(x_0 + k_i, y_0 + l_i) = \overline{\Omega}^{(m)}(f). \tag{3}$$

Записывая уравнение (3) для каждого из N узлов сетки, получим систему N линейных алгебраических уравнений с N неизвестными. Эта система дает возможность определить по заданным значениям u на границе Γ приближенные значения функции $u(x,y)$ во всех узлах внутри G.

2°. Рассмотрим однородные полиномы

$$P_{2n}(x, y) = \sum_{\nu=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^{\nu} \frac{x^{n-2\nu} y^{2\nu}}{(n-2\nu)!(2\nu)!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

$$P_{2n-1}(x, y) = \sum_{\nu=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^{\nu} \frac{x^{n-2\nu-1} y^{2\nu+1}}{(n-2\nu-1)!(2\nu+1)!}, \; n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Лемма. *Полиномы (4) и (5) удовлетворяют следующим условиям:*

$$\frac{\partial}{\partial x} P_{2n}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} P_{2n-1}(x, y), \; \frac{\partial}{\partial x} P_{2n-1}(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} P_{2n}(x, y), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

На основании (6) легко убедиться, что рассматриваемые полиномы являются гармоническими.

Возьмем функции $\Phi_i(x, y)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ в виде

$$\Phi_{2n}(x, y) = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{\nu}^{(n)} P_{2\nu}(x, y - y_0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\Phi_{2n-1}(x, y) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu}^{(n)} P_{2\nu-1}(x, y - y_0), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где

$$\alpha_{\nu}^{(n)} = (-1)^{n+\nu} \frac{x_0^{n-\nu}}{(n-\nu)!}.$$

Предположим, что область G покрыта квадратной сеткой с шагом h, и положим $m = 8$.

Возьмем граничный узел $\alpha_0 = \alpha_0(x_0, y_0)$ и рассмотрим случай, когда все 8 ближайших к нему узлов находятся вне границы Γ. Пусть граница Γ пересекает прямые, соединяющие указанные 8 узлов с узлом α_0, в точках $\alpha_i = \alpha_i(x_0 + \bar{k}_i h, \; y_0 + \bar{l}_i h)$, где

$$\bar{k}_i = t_i \; (i = 1, 3, 6), \; \bar{k}_i = -t_i \; (i = 2, 5, 8), \; \bar{k}_4 = \bar{k}_7 = \bar{l}_1 = \bar{l}_2 = 0,$$

$$\bar{l}_i = t_i \; (i = 3, 4, 5), \; \bar{l}_i = -t_i \; (i = 6, 7, 8), \quad 0 < t_i < 1.$$

Этот случай является общим в следующем смысле. Если окажется, что один или несколько из указанных ближайших к α_0 узлов лежит на Γ или внутри G, то этот новый случай получится из рассматриваемого нами, если соответствующие значения t_i положить равными единице.

Разностное соотношение (2) можно записать в данном случае следующим образом:

$$u(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{8} b_i' u(x_0 + \bar{k}_i h, \; y_0 + \bar{l}_i h) - \Omega^{(8)}(f) + R_{0,0}^{(8)}. \tag{7}$$

Здесь b_i' $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ те же, что и в [1],

$$\Omega^{(8)}(f) = \sum_{k,l=0}^{\infty} h^{k+l+2} c_{kl} d_{kl},$$

$$d_{kl} = \sum_{i=3}^{8} \bar{k}_i^{k} \bar{l}_i^{l+2} b_i',$$

$$|R_{0,0}^{(8)}| < Ch^5M_5 + O(h^6).$$

Отбрасывая в (7) остаточный член $R_{0,0}^{(8)}$ и члены выше 7-го порядка малости относительно h из $\Omega^{(8)}(f)$, получаем разностное уравнение, применимое для произвольного узла квадратной сетки:

$$u(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{8} b'_i u(x_0 + \bar{k}_i h,\ y_0 + \bar{l}_i h) - \overline{\Omega}^{(8)}(f), \tag{8}$$

$$\overline{\Omega}^{(8)}(f) = \sum_{k,l=0}^{k+l=5} h^{k+l+2} c_{kl} d_{kl}.$$

При $t_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ уравнение (8) превращается в известное [3] 9-точечное уравнение

$$20u_0 = 4(u_1 + u_2 + u_4 + u_7) + (u_3 + u_5 + u_6 + u_8) - 6h^2 f -$$
$$- 12\frac{h^4}{4!}\Delta f - 12\frac{h^6}{6!}\left(\Delta^2 f + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} f\right).$$

Для граничных узлов $\overline{\Omega}^{(8)}(f)$ достаточно взять в виде

$$\overline{\Omega}^{(8)}(f) = h^2 c_{00} d_{00} + h^3 (c_{10} d_{10} + c_{01} d_{01}) + h^4 (c_{20} d_{20} + c_{11} d_{11} + c_{02} d_{02}).$$

Примечание

После того как настоящая заметка была подготовлена к печати, автору стала известна работа Альбрехта и Ульмана [5], в которой также строится другим путем 9-точечное разностное уравнение в общем виде для граничного узла квадратной сетки в случае задачи Дирихле для неоднородного уравнения Лапласа. Это уравнение содержит в себе значения оператора Лапласа как в рассматриваемом граничном узле α_0, так и в 8-ми точках α_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$, расположенных на границе области.

Предлагаемое в настоящей заметке разностное уравнение содержит значения оператора Лапласа только лишь в граничном узле α_0. Кроме того, это уравнение, записанное для внутреннего узла, совпадает с известным 9-точечным разностным уравнением [3], порядок погрешности которого h^8.

Однако следует отметить, что коэффициенты b'_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$, полученные в [1] для уравнения Лапласа в случае одного частного вида системы гармонических функций $\{\Phi_i(x, y)\}$, можно получить из коэффициентов, приведенных в [5].

3°. Пример. Пусть требуется найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$\Delta u = -y \cos x$$

в полукруге $x^2 + y^2 < 1$, $y > 0$, удовлетворяющее на границе условиям

$$u = 0, \qquad y = 0,$$

$$u = \sqrt{1 - x^2}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right), \qquad y > 0.$$

Точным решением задачи является, очевидно, функция

$$u(x, y) = y\left(\cos x - \frac{1}{2}\right).$$

В случае $h = 0{,}5$ получаем следующие результаты:

$u(x, y)$	По формуле [8]	По формулам из [2]	Точное
$u(0, h)$	0,24991695	0,26531053	0,25
$u(h, h)$	0,18873519	0,21812106	0,18879128

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Ф. Давиденко и Г. И. Бирюк, К вопросу о решении методом сеток внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, ДАН СССР, т. 129, № 2, 1959, 246—249.
2. Ш. Е. Микеладзе, О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типа, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 5, № 1, 1941, 57—73.
3. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Л. — М., 1949.
4. Д. Ф. Давиденко, Об одном разностном методе решения уравнения Лапласа с осевой симметрией, ДАН СССР, т. 110, № 6, 1956, 910—913.
5. I. Albrecht und W. Uhlmann, Differenzenverfahren für die 1. Randwertaufgabe mit krummlinigen Rändern bei $\Delta u(x, y) = r(x, y, u)$, Z. angew. Math. Mech., 37, 1957, 212—224.

Поступила 1. XI 1960 г.
Москва