Об алгоритме определения эквивалентных начальных условий для линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

А. Д. Мышкис, П. И. Чинаев

При решении ряда практических задач, в частности при построении процессов в многомерных автоматических системах, возникает потребность в эквивалентной замене решения системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях приближенным решением некоторой системы однородных дифференциальных уравнений с ненулевыми начальными условиями.

В настоящей заметке излагается один из возможных алгоритмов определения такой замены, основанный на приближенной аппроксимации внешнего возмущения суммой экспонент.

Пусть имеется линейная неоднородная система дифференциальных уравнений, заданная в форме

$$K(D)\,X(t) = B(D)\,F(t), \tag{1}$$

где $K(D) = A_0D^n + A_1D^{n-1} + \ldots + A_n$ и $B(D) = B_0D^n + B_1D^{n-1} + \ldots + B_n$— матричные многочлены от оператора $D = \frac{d}{dt}$, а A_i, B_i—числовые матрицы m-го порядка; $\det A_0 \neq 0$;

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}; \qquad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix}.$$

Начальные условия для системы (1) нулевые, т. е.

$$X(-0) = X^{(1)}(-0) = \ldots = X^{(n-1)}(-0) = 0.$$

Ставится задача: найти линейную однородную систему уравнений (с постоянными коэффициентами) и соответствующие условия так, чтобы решение $\overline{X}(t)$ этой системы приближенно равнялось решению $X(t)$ исходной системы с любой заданной степенью точности.

Рассмотрим предварительно эту задачу для скалярного случая. Уравнение запишем в виде

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)\,\overline{x}(t) = (b_0D^n + b_1D^{n-1} + \ldots + b_{n-1}D + b_n)\,f(t)\ldots \tag{2}$$

Заменим приближенно

$$f(t) \approx \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e^{\nu_i t}.$$

В таком случае однородное уравнение

$$(D-\nu_1)(D-\nu_2)\ldots(D-\nu_r)(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_nD)\,\overline{x}(t) = 0, \tag{3}$$

которое действует на всем рассматриваемом интервале времени t, при некоторых эквивалентных начальных условиях дает приближенное решение исходного уравнения (2). Действительно, применив к уравнению (2) (с замененной правой частью) преобразование Лапласа с нижним пределом $x = -0$, получим

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)\,\overline{x}(p) = (b_0p^n + b_1p^{n-1} + \ldots + b_{n-1}p + b_n) \times \left(\frac{\lambda_1}{p-\nu_1} + \frac{\lambda_2}{p-\nu_2} + \ldots + \frac{\lambda_r}{p-\nu_r}\right)$$

или

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n)(p^r + \alpha_1p^{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1}p + \alpha_r)\,\overline{x}(p) = (b_0p^n + b_1p^{n-1} + \ldots + b_{n-1}p + b_n)(\sigma_0p^{r-1} + \sigma_1p^{r-2} + \ldots + \sigma_{r-2}p + \sigma_{r-1}), \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = -(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r),\\
&\alpha_2 = (\nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \ldots + \nu_{r-1}\nu_r),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_{r-1} = (-1)^{r-1}(\underbrace{\nu_1\nu_3\ldots\nu_r}_{r-1} + \underbrace{\nu_1\nu_4\ldots\nu_r}_{r-1} + \ldots + \underbrace{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{r-1}}_{r-1}),\\
&\alpha_r = (-1)^r(\nu_1\nu_2\ldots\nu_r)
\end{aligned} \tag{5}$$

и

$$\begin{aligned}
&\sigma_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_r,\\
&\sigma_1 = -[\lambda_1(\nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_r) + \lambda_2(\nu_1 + \nu_3 + \ldots + \nu_r) + \ldots + \lambda_r \times\\
&\qquad \times (\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{r-1})],\\
&\sigma_2 = [\lambda_1(\nu_2\nu_3 + \nu_2\nu_4 + \ldots + \nu_{r-1}\nu_r) + \lambda_2(\nu_1\nu_3 + \nu_1\nu_4 + \ldots + \nu_{r-1}\nu_r) + \ldots +\\
&\qquad + \lambda_r(\nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \ldots + \nu_{r-2}\nu_{r-1})],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sigma_{r-1} = (-1)^{r-1}[\lambda_1\underbrace{(\nu_2\nu_3\ldots\nu_r)}_{r-1} + \lambda_2\underbrace{(\nu_1\nu_3\ldots\nu_r)}_{r-1} + \ldots + \lambda_r\underbrace{(\nu_1\nu_2\ldots\nu_{r-1})}_{r-1}].
\end{aligned} \tag{6}$$

Следовательно, уравнение (4) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&[a_0p^{n+r} + (a_1 + a_0\alpha_1)p^{n+r-1} + (a_2 + a_1\alpha_1 + a_0\alpha_2)p^{n+r-2} + \ldots +\\
&+ (a_{n-2}\alpha_r + a_{n-1}\alpha_{r-1} + a_n\alpha_{r-2})p^2 + (a_{n-1}\alpha_r + a_n\alpha_{r-1})p + a_n\alpha_r]\overline{x}(p) =\\
&= b_0\sigma_0p^{n+r-1} + (b_1\sigma_0 + b_0\sigma_1)p^{n+r-2} + (b_1\sigma_0 + b_1\sigma_1 + b_0\sigma_2)p^{n+r-3} + \ldots +\\
&+ (b_{n-1}\sigma_{r-1} + b_n\sigma_{r-2})p + b_n\sigma_{r-1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

С другой стороны, применив к (3) преобразование Лапласа с нижним пределом $x = +0$, найдем

$$\begin{aligned}
&[a_0p^{n+r} + (a_1 + a_0\alpha_1)p^{n+r-1} + (a_2 + a_1\alpha_1 + a_0\alpha_2)p^{n+r-2} + \ldots +\\
&+ (a_{n-1}\alpha_r + a_n\alpha_{r-1})p + a_n\alpha_r]\overline{x}(p) = \overline{x}(+0)a_0p^{n+r-1} +\\
&+ [\overline{x}(+0)(a_1 + a_0\alpha_1) + \overline{x}^{(1)}(+0)a_0]p^{n+r-2} + [\overline{x}(+0)(a_2 + a_1\alpha_1 + a_0\alpha_2) +\\
&+ \overline{x}^{(1)}(+0)(a_1 + a_0\alpha_1) + \overline{x}^{(2)}(+0)a_0]p^{n+r-3} + \ldots + [\overline{x}(+0)(a_{n-2}\alpha_r + a_{n-1}\alpha_{r-1} +\\
&+ a_n\alpha_{r-2}) + \overline{x}^{(1)}(+0)(a_{n-3}\alpha_r + a_{n-2}\alpha_{r-1} + a_{n-1}\alpha_{r-2} + a_n\alpha_{n-3}) + \ldots +\\
&+ \overline{x}^{(n+r-3)}(+0)(a_1 + a_0\alpha_1) + \overline{x}^{(n+r-2)}(+0)a_0]p + \overline{x}(+0)(a_{n-1}\alpha_r + a_n\alpha_{r-1}) +\\
&+ \overline{x}^{(1)}(+0)(a_{n-2}\alpha_r + a_{n-1}\alpha_{r-1} + a_n\alpha_{r-2}) + \ldots + \overline{x}^{(n+r-3)}(+0)(a_2 + a_1\alpha_1 +\\
&+ a_0\alpha_2) + \overline{x}^{(n+r-2)}(+0)(a_1 + a_0\alpha_1) + \overline{x}^{(n+r-1)}(+0)a_0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Сравнивая правые части уравнений (7) и (8), получим эквивалентные начальные условия как решение следующей системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&a_0\overline{x}(+0) = b_0\sigma_0,\\
&(a_1 + a_0\alpha_1)\overline{x}(+0) + a_0\overline{x}^{(1)}(+0) = b_1\sigma_0 + b_0\sigma_1,\\
&(a_2 + a_1\alpha_1 + a_0\alpha_2)\overline{x}(+0) + (a_1 + a_0\alpha_1)\overline{x}^{(1)}(+0) + a_0\overline{x}^{(2)}(+0) = b_2\sigma_0 + b_1\sigma_1 + b_0\sigma_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{9}$$

$$(a_{n-2}\alpha_r + a_{n-1}\alpha_{r-1} + a_n\alpha_{r-2})\overline{x}(+0) + (a_{n-3}\alpha_r + a_{n-2}\alpha_{r-1} + a_{n-1}\alpha_{r-2} + a_n\alpha_{r-3})\overline{x}^{(1)}(+0) + \ldots + (a_1 + a_0\alpha_1)\overline{x}^{(n+r-3)}(+0) + a_0\overline{x}^{(n+r-2)}(+0) = b_{n-1}\sigma_{r-1} + b_n\sigma_{r-2},$$

$$(a_{n-1}\alpha_r + a_n\alpha_{r-1})\overline{x}(+0) + (a_{n-2}\alpha_r + a_{n-1}\alpha_{r-1} + a_n\alpha_{r-2})\overline{x}^{(1)}(+0) + (a_2 + a_1\alpha_1 + a_0\alpha_2)\overline{x}^{(n+r-3)}(+0) + (a_1 + a_0\alpha_1)\overline{x}^{(n+r-2)}(+0) + a_0\overline{x}^{(n+r-1)}(+0) = b_n\sigma_{r-1}.$$

Входящие в уравнение (9) коэффициенты α_i и σ_k определяются из соотношений (5) и (6).

Рассмотренный случай обобщается на систему

$$K(D)\,X(t) = B(D)\,F(t),$$

где

$$F(t) \approx \sum_{i=1}^{r} \Lambda_i e^{\nu_i t} \tag{10}$$

(здесь Λ_i — числовые матрицы-столбцы, а ν_i — скалярные числа). В таком случае уравнение (10) после замены можно записать в виде

$$(A_0D^n + A_1D^{n-1} + \ldots + A_{n-1}D + A_n)\,\overline{X}(t) = (B_0D^n + B_1D^{n-1} + \ldots + B_{n-1}D + B_n)(\Lambda_1 e^{\nu_1 t} + \Lambda_2 e^{\nu_2 t} + \ldots + \Lambda_r e^{\nu_r t}). \tag{11}$$

После применения к (11) преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях найдем

$$(A_0p^n + A_1p^{n-1} + \ldots + A_{n-1}p + A_n)\,\overline{X}(p) = (B_0p^n + B_1p^{n-1} + \ldots + B_{n-1}p + B_n)\left(\Lambda_1\frac{1}{p-\nu_1} + \Lambda_2\frac{1}{p-\nu_2} + \ldots + \Lambda_r\frac{1}{p-\nu_r}\right)$$

или

$$(p-\nu_1)(p-\nu_2)\ldots(p-\nu_r)(A_0p^n + A_1p^{n-1} + \ldots + A_{n-1}p + A_n)\,\overline{X}(p) = (B_0p^n + B_1p^{n-1} + \ldots + B_{n-1}p + B_n)[\Lambda_1(p-\nu_2)(p-\nu_3)\ldots(p-\nu_r) + \Lambda_2(p-\nu_1)(p-\nu_3)\times\ldots\times\ldots(p-\nu_r) + \ldots + \Lambda_r(p-\nu_1)(p-\nu_2)\ldots(p-\nu_{r-1})]. \tag{12}$$

Если дополнительно к (5) ввести постоянные

$$\begin{aligned}
\beta_{1,i} &= -(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{i-1} + \nu_{i+1} + \ldots + \nu_r),\\
\beta_{2,i} &= (\nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \ldots + \nu_{i-1}\nu_{i+1} + \ldots + \nu_{r-1}\nu_r),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\beta_{r-1,i} &= (-1)^{r-1}\underbrace{(\nu_1\nu_2\ldots\nu_{i-1}\nu_{i+1}\ldots\nu_r)}_{r-1},
\end{aligned} \tag{13}$$

где i указывает, что среди ν отсутствует ν_i, то получим

$$[A_0p^{n+r} + (A_0\alpha_1 + A_1)p^{n+r-1} + (A_0\alpha_2 + A_1\alpha_1 + A_2)p^{n+r-2} + \ldots + (A_{n-2}\alpha_r + A_{n-1}\alpha_{r-1} + A_n\alpha_{r-2})p^2 + (A_{n-1}\alpha_r + A_n\alpha_{r-1})p + A_n\alpha_r]\,\overline{X}(p) = B_0(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_r)p^{n+r-1} + [B_1(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_r) + B_0(\Lambda_1\beta_{1,1} + \Lambda_2\beta_{1,2} + \ldots + \Lambda_r\beta_{1,r})]p^{n+r-2} + [B_2(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_r) +$$

$$+ B_1(\Lambda_1\beta_{11} + \Lambda_2\beta_{12} + \ldots + \Lambda_r\beta_{1r}) + B_0(\Lambda_1\beta_{21} + \Lambda_2\beta_{22} + \ldots + \Lambda_r\beta_{2r})] \times$$
$$\times p^{n+r-2} + \ldots + [B_{n-1}(\Lambda_1\beta_{r-1,1} + \Lambda_r\beta_{r-1,2} + \ldots + \Lambda_r\beta_{r-1,r}) +$$
$$+ B_n(\Lambda_1\beta_{r-2,1} + \Lambda_2\beta_{r-2,2} + \ldots + \Lambda_r\beta_{r-2,r})]\,p + B_n(\Lambda_1\beta_{r-1,1} + \Lambda_2\beta_{r-1,2} +$$
$$+ \ldots + \Lambda_r\beta_{r-1r})]. \tag{14}$$

С другой стороны, система линейных однородных уравнений

$$(D - \nu_1)(D - \nu_2)\ldots(D - \nu_r)(A_0D^n + A_1D^{n-1} + \ldots + A_{n-1}D + A_n)\,\overline{X}(t) = 0 \tag{15}$$

при некоторых нулевых начальных условиях

$$\overline{X}(+0),\ \overline{X}^{(1)}(+0), \ldots, \overline{X}^{(n+r-1)}(+0) \tag{16}$$

должна дать решение, приближенно совпадающее с решением $X(t)$. Поэтому если применить к (15) преобразование Лапласа, то получим

$$N(p)\,\overline{X}(p) = M(p), \tag{17}$$

где

$$N(p) = A_0p^{n+r} + (A_1 + A_0\alpha_1)\,p^{n+r-1} + (A_2 + A_1\alpha_1 + A_0\alpha_2)\,p^{n+r-2} + \ldots +$$
$$+ (A_{n-1}\alpha_r + A_n\alpha_{r-1})\,p + A_n\alpha_r$$

и

$$M(p) = A_0\overline{X}(+0)\,p^{n+r-1} + [(A_1 + A_0\alpha_1)\overline{X}(+0) + A_0\overline{X}^{(1)}(+0)]\,p^{n+r-2} + \ldots +$$
$$+ \{[A_{n-2}\alpha_r + A_{n-1}\alpha_{r-1} + A_n\alpha_{r-2}]\,\overline{X}(+0) + [A_{n-3}\alpha_r + A_{n-2}\alpha_{r-1} +$$
$$+ A_n\alpha_{r-3}]\,\overline{X}^{(1)}(+0) + \ldots + (A_1 + \alpha_1A_0)\,\overline{X}^{(n+r-3)}[(+0) + A_0\overline{X}^{(n+r-2)}(+0)]\}\,p +$$
$$+ (A_{n-1}\alpha_r + A_n\alpha_{r-1})\overline{X}(+0) + (A_{n-2}\alpha_r + A_{n-1}\alpha_{r-1} + A_n\alpha_{r-2})\overline{X}^{(1)}(+0) + \ldots +$$
$$+ (A_2 + A_1\alpha_1 + A_0\alpha_2)\,\overline{X}^{(n+r-3)}(+0) + (A_1 + A_0\alpha_1)\,\overline{X}^{(n+r-2)}(+0) +$$
$$+ A_0\overline{X}^{(n+r-1)}(+0).$$

Сравнивая (17) и (14), находим систему алгебраических уравнений, решениями которых должны быть искомые эквивалентные начальные условия.

$$A_0\overline{X}(+0) = B_0(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_r),$$
$$(A_1 + A_0\alpha_1)\overline{X}(+0) + A_0\overline{X}^{(1)}(+0) = B_1(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_r) + B_0(\Lambda_1\beta_{1,1} +$$
$$+ \Lambda_2\beta_{1,2} + \ldots + \Lambda_r\beta_{1,r})$$

. . . .

$$(A_{n-2}\alpha_r + A_{n-1}\alpha_{r-1} + A_n\alpha_{r-2})\overline{X}(+0) + (A_{n-3}\alpha_r + A_{n-2}\alpha_{r-1} + A_n\alpha_{r-2})\overline{X}^{(1)}(+0) +$$
$$+ \ldots + (A_1 + A_0\alpha_1)\,\overline{X}^{(n+r-3)}(+0) + A_0\overline{X}^{(n+r-2)}(+0) = B_{n-1}(\Lambda_1\beta_{r-1,1} +$$
$$+ \Lambda_2\beta_{r-1,2} + \ldots + \Lambda_r\beta_{r-1,r}) + B_n(\Lambda_1\beta_{r-2,1} + \Lambda_2\beta_{r-2,2} + \ldots + \Lambda_r\beta_{r-2,r}).$$
$$(A_{n-1}\alpha_r + A_n\alpha_{r-1})\overline{X}(+0) + (A_{n-2}\alpha_r + A_{n-1}\alpha_{r-1} + A_n\alpha_{r-2})\overline{X}^{(1)}(+0) + \ldots +$$
$$+ (A_2 + A_1\alpha_1 + A_0\alpha_2)\,\overline{X}^{(n+r-3)}(+0) + (A_1 + A_0\alpha_1)\overline{X}^{(n+r-2)}(+0) +$$
$$+ A_0\overline{X}^{(n+r-1)}(+0) = B_n(\Lambda_1\beta_{r-1,2} + \Lambda_2\beta_{r-1,2} + \ldots + \Lambda_r\beta_{r-1,r}). \tag{18}$$

Входящие в (18) α_i и β_{ji} определяются из (5) и (13).

Условия (9) для скалярного уравнения и (18) для векторного получены в предположении, что правая часть имеет такой же порядок как и левая. В действительности может оказаться, что часть матричных коэффициентов

$$B_0 = B_1 = B_2 = \ldots = B_k = 0 \ (k < n).$$

Тогда условия (18) существенно упрощаются.

То обстоятельство, что система уравнений (18) имеет Гауссову форму, позволяет легко решать эту систему методом подстановки, а сам процесс легко машинизируется.

Поступила 8. VI 1961 г.
Киев