О невозможности построения нелокальной теории поля с положительным спектром оператора энергии-импульса

Д. Я. Петрина

В настоящей заметке рассматривается квантовая теория поля, относительно которой предполагается:

1) инвариантность относительно ортохронной неоднородной группы Лоренца;

2) существование полной системы амплитуд состояния $|p_i\rangle$, являющихся собственными функциями оператора энергии-импульса с собственными числами $(p_{i0}, \overline{p}_i)$ из конуса $\Gamma^+ (p_{i0} \geqslant 0,\ p_i^2 = p_{i0}^2 - \overline{p}_i^2 > 0)$;

3) нелокальная коммутативность, состоящая в том, что

$$\left[A\left(\frac{x}{2}\right),\ A\left(-\frac{x}{2}\right)\right] = 0 \text{ при } x^2 < -l^2 \tag{1}$$

(для определенности будем рассматривать скалярное поле $A(x)$).

Покажем, что справедлива следующая

Теорема. *Из условий 1) —3) следует локальная коммутативность поля*

$$\left[A\left(\frac{x}{2}\right),\ A\left(-\frac{x}{2}\right)\right] = 0 \quad \text{при } x^2 < 0. \tag{2}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$f_{ij}(x) = \left< p_i \left| \left[A\left(\frac{x}{2}\right),\ A\left(-\frac{x}{2}\right)\right] \right| p_j \right>, \tag{3}$$

где $|p_i>$ и $|p_j>$ — произвольные амплитуды состояния. Функция $f_{ij}(x)$ может быть представлена как разница двух функций $f_{ij}^-(x)$ и $f_{ij}^+(x)$, где

$$f_{ij}^-(x) = \left< p_i \left| A\left(\frac{x}{2}\right) A\left(-\frac{x}{2}\right) \right| p_j \right>,\ f_{ij}^+(x) = \left< p_i \left| A\left(-\frac{x}{2}\right) A\left(\frac{x}{2}\right) \right| p_j \right>. \tag{4}$$

Используя трансляционную инвариантность и полноту системы амплитуд состояния, получим для функций $f_{ij}^-(x)$ и $f_{ij}^+(x)$ следующие выражения (вычисления проведем в системе, в которой $p_i + p_j = (p_0, 0)$)

$$\begin{aligned} f_{ij}^-(x) &= e^{ip_0x_0} < p_i|A(0)|k_n> <k_n|A(0)|p_j> e^{-ik_nx}, \\ f_{ij}^+(x) &= e^{-ip_0x_0} < p_i|A(0)|k_n> <k_n|A(0)|p_j> e^{ik_nx}. \end{aligned} \tag{5}$$

В силу второго условия $k_n \in \Gamma^+$, и поэтому функции $f_{ij}^-(x)$ и $f_{ij}^+(x)$ допускают аналитическое продолжение в комплексные области. Именно, функция $f_{ij}^-(z)$ допускает аналитическое продолжение по переменной $z = x + iy$ в область $T^- (y_0 < 0,\ y_0^2 - \overline{y}^2 > 0)$ и представляет собой произведение функции $e^{ip_0z_0}$ на функцию $<p_i|A(0)|k_n><k_n|A(0)|p_j>e^{-ik_nz}$ класса N^-, а функция $f_{ij}^+(z)$ допускает аналитическое продолжение по переменной $z = x + iy$ в область $T^+(y_0 > 0,\ y_0^2 - \bar{y}^2 > 0)$ и представляет собой произведение функции $e^{-ip_0z_0}$ на функцию $<p_i|A(0)|k_n><k_n|A(0)|p_j>e^{ik_nz}$ класса N^+ [1]. Функции $f_{ij}^-(z)$ и $f_{ij}^+(z)$ совпадают в силу третьего условия в области $G\,(x^2 < -l^2,\ y = 0)$.

По теореме «edge of the wedge» [2], [3], [4], [5] функции $f_{ij}^-(z)$ и $f_{ij}^+(z)$ представляют собой одну функцию $F_{ij}(z)$, аналитическую в области $T \cup \bar{G}$, где $\bar{G}$ — некоторая комплексная окрестность области G, а $T = T^- \cup T^+$. Используя теорему 2 работы Владимирова [1], получим, что функция $F_{ij}(z)$ будет аналитической в более широкой области $T \cup \bar{B}_0(G)$, где $B_0(G)$ — наименьшая выпуклая оболочка области G относительно времени подобных кривых, а $\bar{B}_0(G)$ — некоторая комплексная окрестность области $B_0(G)$. Область $B_0(G)$ имеет вид $x^2 < 0,\ y = 0$ [1].

То, что теорема «edge of the wedge» и теорема 2 работы [1] справедливы в нашем случае, когда рассматриваются функции класса N^-, умноженные на $e^{ip_0z_0}$, и функции класса N^+, умноженные на $e^{-ip_0z_0}$, а не просто функции класса N^- и N^+, легко видеть из самого доказательства этих теорем [1], [5]. Справедливость этого результата следует также из работы Борхерса [6].

Так как функция $F_{ij}(z)$ является аналитическим продолжением функций $f_{ij}^-(z)$ и $f_{ij}^+(z)$, то последние совпадают в области $B_0(G)$. Таким образом, функция $f_{ij}(x)$, являющаяся разницей функций $f_{ij}^-(x)$ и $f_{ij}^+(x)$, обращается в нуль в области $B_0(G)$. Этот результат справедлив для любой функции $f_{ij}(x)$.

Функции $f_{ij}(x)$ представляют собой матричный элемент коммутатора $\left[A\left(\frac{x}{2}\right),\ A\left(-\frac{x}{2}\right)\right]$ между любыми амплитудами состояния $|p_i>$ и $|p_j>$. Так как все функции $f_{ij}(x)$ обращаются в нуль в области $B_0(G)$, то это означает, что обращаются в нуль в этой области все матричные элементы коммутатора $\left[A\left(\frac{x}{2}\right),\ A\left(-\frac{x}{2}\right)\right]$.

В силу полноты векторов состояния $|p_i>$ отсюда следует, что в этой области обращается в нуль сам коммутатор

$$\left[A\left(\frac{x}{2}\right),\ A\left(-\frac{x}{2}\right)\right] = 0 \quad \text{при} \quad x^2 < 0. \tag{2}$$

Теорема доказана.

Теорема остается справедливой и в том случае, когда спектр сосредоточен в любой области, обеспечивающей возможность аналитического продолжения функций $f_{ij}^-(x)$ и $f_{ij}^+(x)$ в соответствующие конуса.

Из доказанной выше теоремы следует, что для построения нелокальной теории необходимо, чтобы спектр оператора энергии-импульса был сосредоточен и вне конуса Γ^+. Это обстоятельство, возможно, означает, что в нелокальной теории нужно использовать гильбертово пространство с индефинитной метрикой.

В работах Боголюбова, Медведева и Поливанова [7], [8] было показано, что теория поля, в которой используется гильбертово пространство с индефинитной метрикой, является нелокальной.

Доказанная теорема содержит, в некотором смысле, обратный результат.

Известны попытки [9] вывести дисперсионные соотношения для нелокальной теории (при допущениях 1—3) и обнаружить с помощью дисперсионных соотношений нелокальность.

Из приведенной выше теоремы следует, что дисперсионные соотношения в этом случае будут иметь тот же вид, что и в локальной теории, и что теория в этом случае будет локальной.

Отметим, что рассматриваемая нами задача была сформулирована без доказательства Вайтманом [10].

В заключение выражаю благодарность В. П. Гачку и П. И. Тацуняку за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Владимиров, ДАН, **134**, 251 (1960).
2. Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958.
3. Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров, Изв. АН СССР, сер. матем., **22**, 15 (1958).
4. H. J. Bremermann, R. Oehme, J. G. Taylor, Phys. Rev., **109**, 2178 (1958).
5. H. Epstein, J. Math. Phys., I, 524 (1960).
6. H. J. Borchers, Nuovo cimento, **19**, 787 (1961).
7. Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, Научн. докл. высш. школы, сер. физ.-матем. наук, № 2, 137 (1958).
8. Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, ДАН, **121** (623), (1958).
9. R. Oehme, Phys. Rev., **100**, 1503 (1955).
10. A. Wightman, Problemes mathematiques de la theorie quantique des champs, Lille (1957).

Поступила 15. V 1961 г.
Киев