Обобщение одной теоремы Я. С. Дубнова

В. М. Чернышенко

Во многих вопросах теории поверхностей большое значение имеют геодезические линии. Если поверхность отнесена к криволинейным координатам u, v, то дифференциальное уравнение геодезических линий имеет вид ([1], § 90)

$$\frac{d^2v}{du^2} = -G_{11}^2 - (2G_{12}^2 - G_{11}^1)\frac{dv}{du} + (-G_{22}^2 + 2G_{12}^1)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + G_{22}^1\left(\frac{dv}{du}\right)^3, \quad (1)$$

где G_{jk}^i — так называемые символы Христофеля второго рода ([1], § 79). Изучая вопросы отображения одних поверхностей на другие, многие ученые интересовались поведением геодезических линий при отображениях. Было, например, доказано ([2], §§ 57, 58), что единственными поверхностями, допускающими отображения на плоскость, при которых образами геодезических линий служат прямые, являются поверхности постоянной кривизны. Я. С. Дубнов доказал ([3], стр. 8), что единственными поверхностями, допускающими *конформные* отображения на плоскость с переходом геодезических линий в окружности, являются поверхности постоянной кривизны. В настоящей заметке обобщается эта теорема Я. С. Дубнова.

Рассмотрим некоторую поверхность (F), допускающую отображение (не обязательно конформное!) на плоскость, при котором образами геодезических линий служат окружности (или их дуги). В некоторых координатах x, y уравнения геодезических линий этой поверхности будут иметь вид

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \gamma^2 = 0.$$

Это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению ([4], зад. № 1301)

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0. \quad (2)$$

Всякое решение уравнения (1) должно быть решением и уравнения (2). Уравнение (1) будем записывать в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + B\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + C\,\frac{dy}{dx} + D. \tag{3}$$

Отсюда

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 3A^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} + 5AB\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + 4AC + 2B^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 +$$
$$+ \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} + 3AD + 3BC\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + 2BD + C^2\right)\frac{dy}{dx} +$$
$$+ \left(\frac{\partial D}{\partial x} + CD\right). \tag{4}$$

Подстановка (3) и (4) в (2) дает

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y} - AB\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 + \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + 3A^2 - B^2 - 2AC\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 +$$
$$+ \left(\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} + 5AB - 3AD - 3BC\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + 4AC + 2B^2 - 2C^2 - 4BD\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x} +\right.$$
$$\left. + 3AD + 3BC - 5CD\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + 2BD + C^2 - 3D^2\right)\frac{dy}{dx} +$$
$$+ \left(\frac{\partial D}{\partial x} + CD\right) = 0. \tag{5}$$

Так как в каждом направлении на поверхности проходит геодезическая линия, то (5) относительно $\frac{dy}{dx}$ должно быть тождеством, то есть

$$\frac{\partial A}{\partial y} - AB = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + 3A^2 - B^2 - 2AC = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} + 5AB - 3AD - 3BC = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + 4AC + 2B^2 - 2C^2 - 4BD = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x} + 3AD + 3BC - 5CD = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + 2BD + C^2 - 3D^2 = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial D}{\partial x} + CD = 0. \tag{12}$$

Складывая почленно (8) и (12), а потом вычитая (6) и (10), получаем

$$(A - C)(B - D) = 0. \tag{13}$$

Вычитая из (9) почленно (7) и (11), получаем

$$(A - C)^2 = (B - D)^2; \tag{14}$$

(13) и (14) дают

$$C = A, \quad D = B. \tag{15}$$

В силу (15) система (6) — (12) эквивалентна следующей системе уравнений

$$\frac{\partial A}{\partial x} = B^2 - A^2 - \frac{\partial B}{\partial y}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = AB, \tag{17}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -AB. \tag{18}$$

Из (17) и (18) вытекает, что

$$A = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad B = -\frac{\partial Q}{\partial y}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (16) и (17), имеем

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2, \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}; \tag{21}$$

если положить

$$Q = \ln W. \tag{22}$$

то (21) дает

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0, \tag{23}$$

то есть

$$Q = \ln [\varphi(x) + \psi(y)]. \tag{24}$$

Подстановка (24) в (20) дает

$$\varphi'' = \psi'', \tag{25}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \varphi &= ax^2 + bx + d, \\ \psi &= ay^2 + cy + d - d_1, \end{aligned} \tag{26}$$

где $a, b, c, d, d_1 = \text{const}$.
Итак

$$Q = \ln [a(x^2 + y^2) - bx + cy + d]. \tag{27}$$

То есть

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= \Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12} = \frac{2ax + b}{a(x^2 + y^2) + bx + cy + d}, \\ \Gamma^2_{11} &= \Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12} = \frac{2ay + c}{a(x^2 + y^2) + bx + cy + d}. \end{aligned} \tag{28}$$

В силу (28) уравнение для геодезических линий примет вид

$$y'' = \frac{(2ax + b)(y'^3 + y') - (2ay + c)(y'^2 + 1)}{a(x^2 + y^2) + bx + cy + d}. \tag{29}$$

Общее решение этого дифференциального уравнения (по самому построению) должно иметь вид

$$\begin{aligned} x &= \sigma + \varrho\cos\varphi, \\ y &= \tau + \varrho\sin\varphi, \end{aligned} \tag{30}$$

причем между параметрами ϱ, σ, τ должна быть одна зависимость. Для получения этой зависимости надо (30) подставить в (29). Подстановка дает

$$a(\sigma^2 + \tau^2 - \varrho^2) + b\sigma + c\tau + d = 0. \tag{31}$$

Легко показать, что в силу (31) все окружности (30) ортогональны к фиксированной окружности

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2 - 4ad}{4a^2}$$

в случае $a \neq 0$, и ортогональны к фиксированной прямой

$$bx + cy + d = 0$$

в случае $a = 0$.

Итак, мы пришли к выводу, что поверхность (F) допускает отображение на плоскость, при котором образом семейства геодезических линий служит семейство окружностей, ортогональных к окружности или прямой. Но точно такие же отображения на плоскость допускают и поверхности постоянной кривизны ([5], п. 194), которые к тому же допускают отображения, при которых образами геодезических линий служат прямые. Значит и поверхность (F) допускает отображение на плоскость, при котором образами геодезических линий служат прямые. Все это позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Для того чтобы поверхность* (F) *допускала отображения на плоскость, при которых образами геодезических линий служат окружности (или их дуги), необходимо и достаточно, чтобы поверхность* (F) *была поверхностью постоянной кривизны.*

ЛИТЕРАТУРА

1. П. К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, М., 1956.
2. В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей, т. 2, М.—Л., 1948.
3. Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, вып. 1, М.—Л., 1933.
4. Н. М. Гюнтер и Р. О. Кузьмин, Сб. задач по высш. матем., т. 2, М.—Л., 1947.
5. С. П. Фиников, Курс дифференциальной геометрии, М., 1952.

Поступила 5. X 1959 г.
Днепропетровск