

Применение метода мажорантных областей для определения фильтрационного расхода при неизвестной глубине залегания водоупора

В. И. Лаврик

Применение метода мажорантных областей к довольно сложной задаче, возникшей в связи со строительством Кременчугской ГЭС*, привело к положительным результатам, которые могут быть перенесены на достаточно широкий класс подобных задач.

§ 1. Определение расхода жидкости при $T = \infty$

1. Постановка задачи. Рассматриваем установившуюся фильтрацию через однородную среду из одной реки (I) в другую (II). Об-

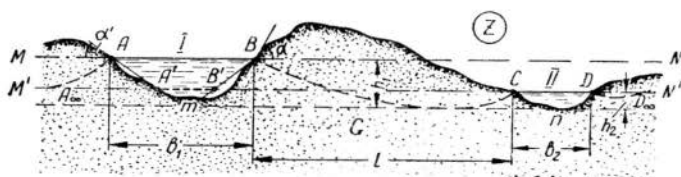


Рис. 1.

ласть фильтрации G изображена на рис. 1, где введены следующие обозначения:

- b_1 — ширина реки (бассейна) I;
- b_2 — ширина реки (бассейна) II;
- l — расстояние между реками;
- $H = h_1 - h_2$ — превышение уровней воды в реках;
- h_1 и h_2 — глубина соответственно I и II реки;
- $T = \infty$ — глубина залегания водоупора, равная бесконечности.

Точное положение депрессионной кривой BC неизвестно. Но, учитывая, что депрессионная кривая является линией тока, а поэтому с эквипотенциальными линиями пересекается ортогонально, можно всегда найти ее предельные положения (рис. 1).

2. Получение верхней оценки. Пользуясь вариационными теоремами, которые впервые были доказаны Г. Н. Положим (им же указан метод мажорантных областей [3], [4], [5]), построим мажорантную область \bar{G} , дающую верхнюю оценку \bar{Q} искомого расхода Q .

Будем изменять исходную область G (рис. 1) так, чтобы с одной стороны она давала для искомого расхода верхнюю оценку, с другой же стороны была настолько проста, чтобы ее можно было отобразить на прямо-

* Работа была выполнена на кафедре математической физики Киевского государственного университета в 1958 году.

угольник — область комплексного потенциала. Выдавим эквипотенциальные линии так, чтобы верхний и нижний водоемы имели форму прямоугольников; линию тока выдавим до совмещения с ломаной $BC'C$, и линии тока $A_\infty A$ и DD_∞ выдавим до совмещения с горизонтальной прямой $\bar{A}_\infty A$ и $\bar{D}\bar{D}_\infty$ (рис. 2).

Линии тока $\bar{C}\bar{C}'C$ и $\bar{D}\bar{D}$, образованные при описывании ломаной $C'KLD$ полукругностью радиуса

$$R = \sqrt{h_1^2 + \left(\frac{b_1}{2}\right)^2}, \quad (1.1)$$

заменяем эквипотенциальными линиями. Затем полученную новую эквипо-



Рис. 2.

тенциальную линию $\bar{C}\bar{C}'KLD\bar{D}$ вдавим до совмещения ее с частью полукругности $\bar{C}KLD$. Наконец, линию тока $\bar{D}\bar{D}'D_\infty$ выдавим до совмещения с линией $\bar{D}\bar{D}'D_\infty$ (рис. 2).

Полученная область \bar{G} и будет искомой, если в области \bar{G}' ломаную $AEFB$ заменить некоторой кривой (причина такой замены будет ясна в дальнейшем).

Область \bar{G}' при помощи преобразования

$$W_1 = \frac{z - 2R}{z} \quad (1.2)$$

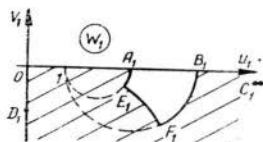


Рис. 3.

перейдет в четвертый квадрант плоскости W_1 с исключенным криволинейным четырехугольником $A_1E_1F_1B_1$ (рис. 3).

Преобразование (1.2) как дробно-линейное переводит прямые отрезки AE , EF и FB соответственно в дуги A_1E_1 , E_1F_1 и F_1B_1 окружностей, которые пересекаются ортогонально (рис. 3).

При помощи преобразования $W_2 = W_1^2$ отобразим область \bar{G}_1 в нижнюю полуплоскость. Образы A_1E_1 , B_1F_1 и E_1F_1 перейдут в новые кривые, уравнения которых в плоскости W_2 (рис. 4) примут следующий вид
уравнение кривой B_2E_2 :

$$u_2 = \left(1 + \frac{2Rl_1}{l_1^2 + t^2}\right)^2 - \frac{4R^2t^2}{(l_1^2 + t^2)^2}, \quad (1.3)$$

$$v_2 = -2 \left(1 + \frac{2Rl_1}{l_1^2 + t^2}\right) \frac{2Rt}{l_1^2 + t^2},$$

где параметр $0 \leq t \leq h_1$;

уравнение кривой A_2E_2 :

$$u_2 = u_2(l_2, t), \quad (1.4)$$

$$v_2 = v_2(l_2, t).$$

Так как $\frac{du_2}{dt} < 0$ при любом значении l , то кривая B_2F_2 расположена левее прямой

$$u_2^{(2)} = \left(1 + \frac{2R}{l_1}\right)^2 = \text{const},$$

причем эта кривая убывает монотонно, так как $\frac{dv_2}{dt} < 0$ при $l > \sqrt{3} \cdot h_1$, что выполняется по условию задачи.

Из системы (1.3), положив $t = h_1$, найдем наименьшее значение ординаты кривой B_2F_2 , которое соответствует точке F_2 (рис. 4):

$$v_2^{(F_2)} = -\frac{4Rh_1}{l_1^2 + h_1^2} \left(1 + \frac{2Rl}{l_1^2 + h_1^2}\right) = -\alpha.$$

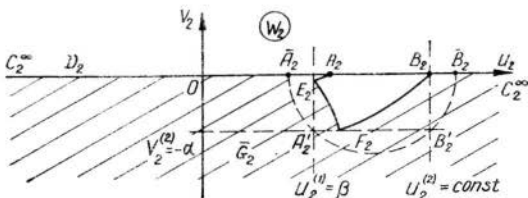


Рис. 4.

Кривые A_2E_2 и B_2F_2 будут лежать выше прямой $v_2^{(2)} = -\alpha$ в силу их монотонности.

Аналогично найдем ординату точки E_2 из системы (1.4), положив $t = h_1$:

$$v_2^{(E_2)} = \left(1 + \frac{2Rl_2}{l_2^2 + h_1^2}\right)^2 - \frac{4Rh_1}{(l_2^2 + h_1^2)^2} = \beta.$$

В силу монотонности A_2E_2 будет лежать правее прямой $u_2^{(1)} = \beta$.

Дуга E_2F_2 лежит выше прямой $v_2^{(2)} = -\alpha$, так как

$$\frac{4Rh_1}{t^2 + h_1^2} \left(1 + \frac{2Rt}{t^2 + h_1^2}\right) \leq \frac{4Rh_1}{l_1^2 + h_1^2} \left(1 + \frac{2Rl_1}{l_1^2 + h_1^2}\right)$$

при $l_1 \leq t \leq l_2$.

Проведенные исследования показывают, что криволинейный четырехугольник $A_2E_2F_2B_2$ в плоскости W_2 лежит внутри прямоугольника, образованного прямыми

$$u_2^{(1)} = \beta; \quad u_2^{(2)} = \left(1 + \frac{2R}{l_1}\right)^2; \quad v_2^{(1)} = 0; \quad v_2^{(2)} = -\alpha.$$

Опишем прямоугольник полуокружностью радиуса $R_1 = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$, где

$$\gamma = \frac{\left(1 + \frac{2R}{l_1}\right) - \beta}{2}.$$

Полученная область представляет собой нижнюю плоскость с выключенным полукругом. Образом этой области в плоскости z и будет область \bar{G} , составляющая часть области \bar{G}' (рис. 2), где эквипотенциальная линия в форме кривой $AEFA$ перейдет в плоскости W_2 в полуокружность (на рис. 4 изображена пунктиром).

Область \bar{G}_2 отобразим на нижнюю полуплоскость при помощи дробно-линейных преобразований

$$W_3 = \frac{W_2 - \bar{B}_2}{W_2 - A_2} \quad \text{и} \quad \zeta = k \frac{W_3 - a_1}{W_3 - a_2}$$

при соответствии точек, указанном в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

z	w_1	w_2	w_3	ζ
A	A_1	$\bar{A}_2 = \gamma + \beta - R_1 = a^*$	$A_3 = -\infty$	$-\frac{1}{m^*}$
B	B_1	$\bar{B}_2 = \gamma + \beta + R_1 = b^*$	$B_3 = 0$	-1
C	$C_1 = \infty$	$C_2 = \infty$	$C_3 = 1$	+1
D	$D_1 = \frac{-iH}{R + \sqrt{R^2 - H^2}}$	$D_2 = \frac{-H^2}{(R + \sqrt{R^2 - H^2})^2} = -d^*$	$D_3 = \frac{d^* + b^*}{d^* + a^*} = d^{**}$	$-\frac{1}{m^*}$

Наконец, отображаем область ζ на прямоугольник — область комплексного потенциала $\bar{W} = \bar{u} + i\bar{v}$ — при помощи эллиптического интеграла I рода с модулем m^* , который определится из соответствия граничных точек (табл. 1) по формуле:

$$m^* = \frac{d^{**} - \sqrt{d^{**2} - d^{*2}}}{d^{**} + \sqrt{d^{**2} - d^{*2}}} \quad (m < 1). \quad (1.5)$$

Верхняя оценка искомого расхода определится по формуле

$$\bar{Q} = \frac{\kappa H}{2} \left(\frac{K'}{K} \right)^*, \quad (1.6)$$

где $K(m^*)$ — полный эллиптический интеграл I рода с модулем m^* , $K'(m^*)$ — полный эллиптический интеграл при дополнительном модуле $m^{*'} = \sqrt{1 - m^{*2}}$, κ — коэффициент фильтрации.

3. Получение нижней оценки. Мажорантную область \underline{G} , дающую нижнюю оценку \underline{Q} искомого расхода Q для области фильтрации \underline{G} , изображенной на рис. 1, будем строить следующим образом.

Пусть известно, что наклон берегов в реке (бассейне) I к горизонту соответственно равен α' и α ($\alpha' < \alpha$). Проведем секущие под углом α' к горизонту через точки A и B и найдем их пересечение с прямой $M'N'$ (рис. 1).

Эквипотенциальную линию AmB вдавим до совмещения с ломаной $AA'B'V$. Части эквипотенциальных линий AA' и BB' заменим линиями тока и полученные при этом линии тока $A_\infty AA'$ и $B'BC$ вдавим до совмещения с прямой $M'N'$. Наконец, эквипотенциальную линию CnD и линию тока DD_∞ совместим тоже с прямой $M'N'$. Полученная область фильтрации \underline{G} , представляющая собой нижнюю полуплоскость и будет искомой, так как фильтрационный расход \underline{Q} для этой области \underline{G} согласно вариационным теоремам [3], [4], [5] будет давать оценку снизу \underline{Q} искомого расхода Q .

Затем, отображая полученную область \underline{G} на прямоугольник-область комплексного потенциала $W = u + iv$, соблюдая при этом правило соответствия граничных точек A, B, C и D , найдем величину расхода \underline{Q} по формуле

$$\underline{Q} = \frac{\kappa H}{2} \left(\frac{K'}{K} \right)_* \quad (1.7)$$

где модуль m_* полного эллиптического интеграла I-го рода $K(m_*)$ определяется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} d &= l + H \operatorname{tg} \alpha' + b_2, \\ a &= b_1 - 2H \operatorname{tg} \alpha', \\ c^* &= \frac{C}{C + a}, \quad d^* = \frac{d}{d + a}, \\ m_* &= \frac{d^* - \sqrt{d^{*2} - c^* d^*}}{d^* + \sqrt{d^{*2} - c^* d^*}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

4. Пример. Пусть $l = 2500$ м, $h_1 = 5$ м, $h_2 = 3$ м, $b_1 = 500$ м, $b_2 = 50$ м, $\alpha' = 45^\circ$.

Тогда, выполнив необходимые подсчеты, находим:

$$\bar{Q} = 0,672\kappa, \quad \underline{Q} = 0,662\kappa, \quad Q = 0,667\kappa,$$

где κ — коэффициент фильтрации.

Относительная погрешность $\Delta \approx 0,6\%$.

§ 2. Определение расхода жидкости при конечной глубине залегания водоупора T

1. Постановка задачи. Условия фильтрации те же, что и в предыдущей задаче (§ 1), с тем лишь изменением, что T — конечная величина (область G имеет водоупор).

2. Получение верхней оценки. Для получения мажорантной области \bar{G} , дающей оценку сверху для искомого расхода жидкости, воспользуемся частично теми же преобразованиями границ исходной области, которыми мы пользовались в предыдущем параграфе: эквипотенциальные линии выдвигим до совмещения с соответствующими прямоугольниками (рис. 2 и рис. 5).

Наша задача состоит в том, чтобы построить такую область \bar{G} (рис. 5), которая бы в конечном счете могла быть отображена на прямоугольник.

Область \bar{G} построена путем варьирования соответствующих образов данной области G в плоскостях W_1, W_2 и т. д. Проследим за последовательностью вариаций области G .

С помощью функции $W_1 = e^{\frac{\pi z}{T+h_1}}$ отобразим имеющуюся область (горизонтальную полосу с исключенными двумя прямоугольниками) на нижнюю полуплоскость с исключенными криволинейными четырехугольниками (рис. 6).

Кривые $A_1E_1, \bar{B}_1F', C_1K_1$ и \bar{D}_1L_1 являются дугами окружностей с радиусами соответственно:

$$\begin{aligned} Q_1 &= e^{\frac{-\pi(l+b_1)}{T+h_1}}, & Q_2 &= e^{\frac{-\pi l}{T+h_1}}, \\ Q_3 &= e^C = 1, & Q_4 &= e^{\frac{\pi b_2}{T+h_1}}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Линии E_1F_1 и K_1L_1 лежат на луче

$$\varphi = \frac{\pi h_1}{T + h_1}. \quad (2.2)$$

Выполнив преобразование сдвига $W_2 = W_1 - Q_3 \cos \varphi$, получим область такую же, как на рис. 2, с тем лишь отличием, что здесь $\bar{h}_1 \neq \bar{h}_2$.

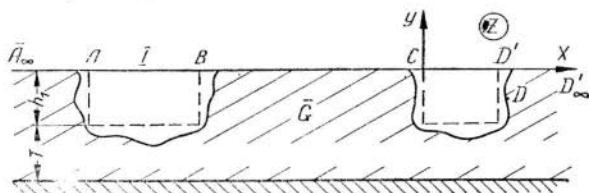


Рис. 5.

Все дальнейшие преобразования будут в точности такие же, как и в § 1. Так, например, ломаную $\bar{C}_1\bar{K}_1\bar{L}_1D'_1$ (рис. 6) будем выдавливать до совмещения с полуокружностью радиуса

$$R = \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2}. \quad (2.3)$$

Формула (2.3) аналогична формуле (1.1).

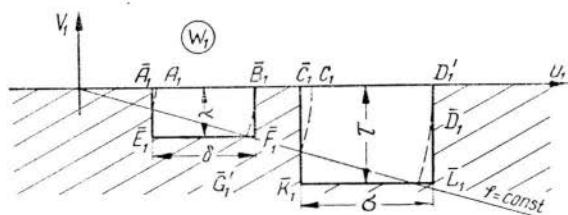


Рис. 6.

Нетрудно убедиться, что модуль полного эллиптического интеграла I рода в данном случае будет определяться главным образом по формулам предыдущего параграфа (см. табл. 1).

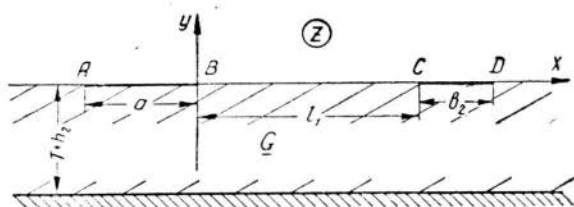


Рис. 7.

Итак, задача нахождения оценки сверху искомого расхода полностью решена.

3. Нахождение нижней оценки. За исходную область берем ту же область G . Мажорантная область G , дающая нижнюю оценку Q искомого расхода Q , представляет собой горизонтальную полосу шириной $T + h_2$ (рис. 7), которая при помощи функции $W_1 = e^{\frac{\pi z}{T+h_2}}$ отобразится на нижнюю полуплоскость плоскости W_1 . Последующие преобразования и соответствие граничных точек приведены в табл. 2 (см. стр. 16).

Вычисление нижней оценки удобно, например, вести в следующем порядке:

$$\begin{aligned}
 1) \quad a &= b_1 - 2H \operatorname{tg} \alpha', & 2) \quad d &= l + b_2 + H \operatorname{tg} \alpha', \\
 3) \quad a^* &= -e^{\frac{-\pi a}{T+h_2}} + 1, & 4) \quad c^* &= e^{\frac{\pi c}{T+h_2}} + 1, \\
 5) \quad d^* &= e^{\frac{\pi d}{T+h_2}} - 1, & 6) \quad c^{**} &= \frac{c^*}{c^* + a^*}, \\
 7) \quad d^{**} &= \frac{d^*}{d^* + a^*}, & 8) \quad m_* &= \frac{d^{**} - \sqrt{d^{**2} - c^* d^*}}{d^{**} + \sqrt{d^{**2} - c^* d^*}}, \\
 9) \quad Q &= \frac{\kappa H}{2} \left(\frac{K'}{K} \right)_*.
 \end{aligned}$$

Таблица 2

Z	$A < 0$	$B = 0$	$C > 0$	$D > 0$
$W_1 = e^{\frac{\pi z}{T+h_2}}$	$A_1 > 0$	$B_1 = 1$	$C_1 > 1$	$D_1 > 1$
$W_2 = W_1 - 1$	$A_2 < 0$	$B_2 = 0$	$C_2 > 0$	$D_2 > 0$
$W_3 = \frac{W_2}{W_2 + A_2}$	$A_3 = -\infty$	$B_3 = 0$	$C_3 = C^*$	$D_3 = d^*$
$W_4 = \frac{W_3 - a}{W_3 - b} = \zeta$	$-\frac{1}{m_*}$	-1	$+1$	$+\frac{1}{m_*}$

§ 3. Определение фильтрационного расхода при неизвестной глубине залегания водоупора

На практике приходится сталкиваться с задачами, в которых неизвестна величина залегания водоупора T .

Такая задача, например, возникла перед проектировщиками Кременчугской ГЭС, когда величину залегания водоупора во многих случаях не представлялось возможным найти из-за большой глубины его залегания. Очень часто при решении такой фильтрационной задачи глубину залегания водоупора считают бесконечной. Но полученные при этом результаты (например, определение фильтрационного расхода) содержат, как правило, большую погрешность в определении искомой фильтрационной характеристики.

Данный метод решения такой задачи состоит в следующем:

Используется тот факт, что всегда можно указать величину T^* такую, что величина водоупора T будет больше, чем T^* (рис. 8). Зная величину T^* , удастся найти оценки фильтрационных характеристик сверху и снизу.

Пусть условия задачи такие же, как и в задачах § 1 и § 2, но глубина залегания водоупора неизвестна, а известна лишь величина (рис. 8) T_1^* (например, глубина, достигнутая при бурении).

Тогда областью \bar{G}^* , дающей верхнюю оценку, будет либо область \bar{G}' , изображенная на рис. 2 § 1, либо область \bar{G} , изображенная на рис. 5 § 2 (где $T = T_\infty$).

Областью \underline{G}^* , дающей нижнюю оценку искомой величины, может быть, например, область \underline{G} , изображенная на рис. 7.

Погрешность полученных результатов зависит от отношения $\frac{l}{T}$. Чем это отношение меньше, тем меньше и погрешность в определении искомой

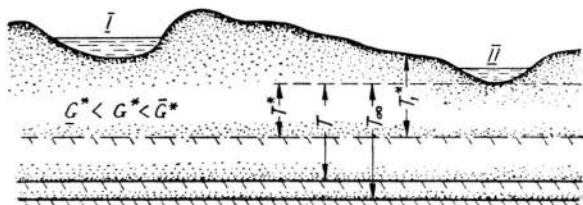


Рис. 8.

величины. При увеличении $H = h_1 - h_2$ данные результаты требуют улучшения и поэтому должны быть изучены отдельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев, Конформные отображения, Гостехиздат, М.—Л., 1946.
2. Ф. Б. Нельсон-Скорняков, Фильтрация в однородной среде, Изд-во «Советская наука», М., 1949.
3. Н. О. Пахарева, Застосування методу мажорантних областей до задачі про фільтрацію під плоским флютбетом з двома шпунтами, ДАН УРСР, № 1, 1956.
4. Н. А. Пахарева и И. И. Ляшко, О решении фильтрационных задач методом мажорантных областей, УМЖ, т. XII, № 4, 1960.
5. Г. Н. Положий, Теорема о сохранении области для некоторых эллиптических уравнений, Матем. сб., т. 32 (74), 1953.
6. Г. Н. Положий, Метод движения граничных точек и мажорантных областей в теории фильтрации, УМЖ, т. V, № 4, 1953.
7. Г. Н. Положий, Вариационные теоремы и метод мажорантных областей, УМЖ, т. V, № 3, 1954.
8. П. Ф. Фильчаков, Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями, т. I, Изд-во АН УССР, К., 1959.

Поступила 26. I 1961 г.

Киев

Application of the method of majorant regions for determining the filtration discharge with unknown depth of bedding of the impermeable soil

V. I. Lavrik

Summary

The method of majorant regions is used to determine the filtration in three essentially different cases: 1) the depth of bedding of the impermeable soil is taken as infinity; 2) the impermeable soil is at a finite depth; 3) the depth of bedding of the impermeable soil is unknown. An example is given of the first case.