Неавтономная квазилинейная система со многими степенями свободы в области общего резонанса

П. М. Сеник

В статье продолжается [3] распространение метода Н. Н. Боголюбова [1, 2] на неавтономные системы со многими степенями свободы в области общего резонанса.

Пусть колебательная система с N степенями свободы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} - \sum_{r=1}^{N} a_{sr} x_r = \sum_{n=1}^{M} \varepsilon^n f_{sn}(x_1, \ldots, x_N, p_1 t, \ldots, p_{N_1} t), \tag{1}$$

где $a_{sr} = -a_{rs}$ — постоянные коэффициенты, ε — малый положительный параметр, $f_{sn}(x_1, \ldots, x_N, p_1 t, \ldots, p_{N_1} t)$ — функция, периодическая по отношению к $p_j t$ $(j = 1, \ldots, N_1)$ с периодом 2π, которая может быть представлена в виде

$$f_{sn} = \sum_{n_{s1},\ldots,n_{sN_1}=-\infty}^{\infty} f^{(n)}_{n_{s1}\ldots n_{sN_1}}(x_1, \ldots, x_N)\, e^{i\sum\limits_{j=1}^{N_1} n_{sj} p_j t}. \tag{2}$$

При этом предполагается, что функции $f^{(n)}_{n_{s_1}\ldots n_{sN_1}}$ имеют конечные частные производные $M-n-1$-го порядка по всем переменным x_s $(s = 1, \ldots, N)$.

Пусть характеристическое уравнение порождающей $(\varepsilon = 0)$ системы в (1) имеет N_2 пар различных чисто мнимых корней $\pm i\,\omega_l$ $(l = 1, \ldots, N_2)$.

Введем обозначение

$$p_j = \omega_{N_2+j} \quad (j = 1, \ldots, N_1). \tag{3}$$

Будем считать, принимая во внимание обозначение (3), что между частотами свободных колебаний и возбуждающих сил имеют место соотношения

$$\omega_l = \sum_{\gamma=1}^{N'} k_{l\gamma}\omega_\gamma \quad (l = 1, \ldots, N_2), \tag{4}$$

где $N' = N_1 + N_2$, $k_{l\gamma}$ — целые числа.

Зависимость (4) физически характеризует общий резонанс колеблющейся системы.

Решение системы уравнений (1) будем искать с помощью разложений

$$x_s = \sum_{l=1}^{N_2} a_l\,[\varphi_{sl} e^{i(\theta_l+\psi_l)} + \varphi^*_{sl} e^{-i(\theta_l+\psi_l)}] + \sum_{n=1}^{M} \varepsilon^n u_{sn}(a_1, \ldots, a_{N_2}, \psi_1, \ldots, \psi_{N_2}, \theta_1, \ldots, \theta_{N'}), \tag{5}$$

в которых u_{sn} являются периодическими функциями углов ψ_l и $\theta_\gamma = \omega_\gamma t$ $(\gamma = 1, \ldots, N')$ с периодом 2π, а величины a_l и ψ_l как функции времени определяются системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da_l}{dt} &= \sum_{n=1}^{M} \varepsilon^n A_n^{(l)}(a_1, \ldots, a_{N_2}, \psi_1, \ldots, \psi_{N_2}), \\ \frac{d\psi_l}{dt} &= \sum_{n=1}^{M} \varepsilon^n B_n^{(l)}(a_1, \ldots, a_{N_2}, \psi_1, \ldots, \psi_{N_2}), \end{aligned} \tag{6}$$

где $A_n^{(l)}$ и $B_n^{(l)}$ подлежат такому определению, при котором (5) должно удовлетворять (1), когда a_l и ψ_l удовлетворяют (6).

Постоянные комплексные величины φ_{sl}, φ^*_{sl} являются нетривиальным решением системы однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \omega_l\varphi_{sl} + i\sum_{r=1}^{N} a_{sr}\varphi^*_{rl} &= 0, \\ \omega_l\varphi^*_{sl} - i\sum_{r=1}^{N} a_{sr}\varphi_{rl} &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где знак (*) указывает на переход к комплексно-сопряженной величине.

Введем обозначение

$$\sum_{s=1}^{N} \varphi_{sl}^2 = \eta_l, \quad \sum_{s,r=1}^{N} a_{sr}\varphi_{sl}\varphi_{rl} = \alpha_l, \tag{8}$$

тогда

$$\sum_{s=1}^{N} \varphi_{sl}^*\varphi_{sl} = \frac{i\alpha_l}{\omega_l}, \quad \sum_{s,r=1}^{N} a_{sr}\varphi_{rl}^*\varphi_{sl} = i\omega_l\eta_l. \tag{9}$$

Из (7), учитывая, что $a_{sr} = -a_{rs}$, находим

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{N} \varphi_{sl}\varphi_{s\nu} = 0, \quad \sum_{s,r=1}^{N} a_{sr}\varphi_{sl}\varphi_{r\nu} = 0, \\ &\sum_{s=1}^{N} \varphi_{sl}\varphi_{s\nu}^* = 0, \quad \sum_{s,r=1}^{N} a_{sr}\varphi_{sl}\varphi_{r\nu}^* = 0 \end{aligned} \qquad (l \neq \nu). \tag{10}$$

Дифференцируя (5) по времени и учитывая (6), имеем

$$\frac{dx_s}{dt} = i\sum_{l=1}^{N_2} a_l\omega_l\left[\varphi_{sl}e^{i(\theta_l+\psi_l)} - \varphi_{sl}^*e^{-i(\theta_l+\psi_l)}\right] +$$

$$+\sum_{n=1}^{M}\varepsilon^n\left\{\sum_{\gamma=1}^{N'}\omega_\gamma\frac{\partial u_{sn}}{\partial\theta_\gamma} + \sum_{l=1}^{N_2}\left[(A_n^{(l)} + ia_lB_n^{(l)})\,\varphi_{sl}e^{i(\theta_l+\psi_l)} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+(A_n^{(l)} - ia_lB_n^{(l)})\varphi_{sl}^*e^{-i(\theta_l+\psi_l)}\right]\right\} + \sum_{m,k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N_2}\varepsilon^{m+k}\left[\frac{\partial u_{sm}}{\partial a_l}A_k^{(l)} + \frac{\partial u_{sm}}{\partial\psi_l}B_k^{(l)}\right]. \tag{11}$$

Правую часть (1), учитывая (5), разлагаем в ряд

$$\sum_{n=1}^{M}\varepsilon^n f_{sn}(x_1, \ldots, x_N, \theta_{N_2+1}, \ldots, \theta_{N'}) = \varepsilon f_{s1}(u_{10}, \ldots, u_{N0}, \theta_{N_2+1}, \ldots, \theta_{N'}) +$$

$$+\varepsilon^2\left\{f_{s2}(u_{10}, \ldots, u_{N0}, \theta_{N_2+1}, \ldots, \theta_{N'}) + \sum_{r=1}^{N}\left.\frac{\partial f_{s1}}{\partial x_r}\right|_{x_r=u_{r0}}\right\} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\varepsilon^n F_{sn}(a_1, \ldots, a_{N_2}, \beta_1, \ldots, \beta_{N_2}, \psi_1, \ldots, \psi_{N_2}, \theta_{N_2+1}, \ldots, \theta_{N'}), \tag{12}$$

где $u_{s0} = x_s|_{\varepsilon=0}$, $\beta_l = \theta_l + \psi_l$, а функция F_{s1} не зависит от ψ_l.

Подставляя (5), (11) и (12) в (1) и приравнивая в полученном выражении коэффициенты при одинаковых степенях ε, в результате получаем следующую систему уравнений

$$\sum_{\gamma=1}^{N'}\omega_\gamma\frac{\partial u_{sn}}{\partial\theta_\gamma} - \sum_{r=1}^{N}a_{sr}u_{rn} = F_{sn} - \sum_{l=1}^{N_2}\left\{(A_n^{(l)} + ia_lB_n^{(l)})\,\varphi_{sl}e^{i(\theta_l+\psi_l)} +\right.$$

$$\left.+(A_n^{(l)} - ia_lB_n^{(l)})\,\varphi_{sl}^*e^{-i(\theta_l+\psi_l)} + \sum_{m=1}^{n-1}\left(\frac{\partial u_{sm}}{\partial a_l}A_{n-m}^{(l)} + \frac{\partial u_{sm}}{\partial\psi_l}B_{n-m}^{(l)}\right)\right\}, \tag{13}$$

где $s = 1, \ldots, N$; $n = 1, \ldots, M$.

Умножая (13) на $\varphi_{s\nu}$ и суммируя по s, учитывая (8), (9) и (10), находим

$$\sum_{s=1}^{N}\sum_{\gamma=1}^{N'}\omega_\gamma \frac{\partial u_{sn}}{\partial\theta_\gamma}\varphi_{s\nu} - \sum_{s,r=1}^{N} a_{sr}u_{rn}\varphi_{s\nu} = \Phi_{n\nu} -$$

$$- (A_n^{(\nu)} + ia_\nu B_n^{(\nu)})\,\eta_\nu e^{i(\theta_\nu+\psi_\nu)} - i\,(A_n^{(\nu)} - ia_\nu B_n^{(\nu)})\frac{\alpha_\nu}{\omega_\nu}e^{-i(\theta_\nu+\psi_\nu)}, \qquad (14)$$

где

$$\Phi_{n\nu} = \sum_{s=1}^{N}\left\{F_{sn} - \sum_{l=1}^{N_2}\sum_{m=1}^{n-1}\left(\frac{\partial u_{sm}}{\partial a_l}A_{n-m}^{(l)} + \frac{\partial u_{sm}}{\partial\psi_l}B_{n-m}^{(l)}\right)\varphi_{s\nu}\right\}.$$

Как видно из (14), функцию $\Phi_{n\nu}$ в n-м приближении можно считать известной, так как она выражается через функции u_{sm}, $A_m^{(l)}$, $B_m^{(l)}$, до $n-1$-го порядка.

Чтобы из функций u_{sn} исключить резонансные члены, наложим на нее дополнительные условия

$$\int_0^{2\pi} u_{sn}e^{-i\theta_l}d\theta_l = 0 \qquad (l = 1, \ldots, N_2), \qquad (15)$$

которые дают возможность однозначно определить $A_n^{(l)}$ и $B_n^{(l)}$.

Разлагая $\Phi_{n\nu}$ в ряд Фурье по переменным $\beta_l = \theta_l + \psi_l$ $(l = 1, \ldots, N_2)$ и θ_{N_2+j} $(j = 1, \ldots, N_1)$, получаем

$$\Phi_{n\nu}(a_1, \ldots, a_{N_2}, \beta_1, \ldots, \beta_{N_2}, \psi_1, \ldots, \psi_{N_2}, \theta_{N_2+1}, \ldots, \theta_{N'}) =$$

$$= \sum_{k_{\nu_1},\ldots,k_{\nu N'}=-\infty}^{\infty} f_{k_{\nu_1}\ldots k_{\nu N'}}^{(n)} e^{i\left[\sum\limits_{l=1}^{N_2} k_{\nu l}(\theta_l+\psi_l) + \sum\limits_{j=1}^{N_1} k_{\nu j}\theta_{N_2+j}\right]} = \qquad (16)$$

$$= \sum_{k_{\nu_1},\ldots,k_{\nu N'}=-\infty}^{\infty} f_{k_{\nu_1}\ldots k_{\nu N'}}^{(n)} e^{i\left[\sum\limits_{l=1}^{N_2} k_{\nu l}\psi_l + \sum\limits_{\gamma=1}^{N'} k_{\nu\gamma}\theta_\gamma\right]},$$

где

$$f_{k_{\nu_1}\ldots k_{\nu N'}}^{(n)}(a_1, \ldots, a_{N_2}, \psi_1, \ldots, \psi_{N_2}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N'}}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\Phi_{n\nu}e^{-i\left[\sum\limits_{l=1}^{N_2} k_{\nu l}\beta_l + \sum\limits_{j=1}^{N'} k_{\nu j}\theta_{N_2+j}\right]} d\beta_1\ldots d\beta_{N_2}d\theta_{N_2+1}\ldots d\theta_{N'}. \qquad (17)$$

Умножая (14) на $e^{-i\theta_l}d\theta_l$ и интегрируя в пределах $[0,2\pi]$, учитывая (4), (16) и (17), находим

$$A_n^{(\nu)} = \frac{1}{2}\sum_{\bar{k}_{\nu_1},\ldots,\bar{k}_{\nu N'}=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\eta}f_{\bar{k}_{\nu 1}\ldots\bar{k}_{\nu N'}}^{(n)} e^{i\left[\sum\limits_{l=1}^{N_2}\bar{k}_{\nu l}\psi_l - \psi_\nu\right]} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\eta^*}f_{\bar{k}_{\nu 1}\ldots\bar{k}_{\nu N'}}^{(n)*} e^{-i\left[\sum\limits_{l=1}^{N_2}\bar{k}_{\nu l}\psi_l - \psi_\nu\right]}\right\}, \qquad (18)$$

$$B_n^{(\nu)} = \frac{-i}{2a_\nu} \sum_{\bar{k}_{\nu 1}, \ldots, \bar{k}_{\nu N'} = -\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\eta} f^{(n)}_{\bar{k}_{\nu 1} \ldots \bar{k}_{\nu N'}} e^{i \left[\sum\limits_{l=1}^{N_2} \bar{k}_{\nu l} \psi_l - \psi_\nu \right]} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\eta^*} f^{(n)*}_{\bar{k}_{\nu 1} \ldots \bar{k}_{\nu N'}} e^{-i \left[\sum\limits_{l=1}^{N_2} \bar{k}_{\nu l} \psi_l - \psi_\nu \right]} \right\}.$$

Решение системы (14) представим в виде ряда Фурье

$$u_{sn} = \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{k_{l1}, \ldots, k_{lN'} = -\infty}^{\infty} \varphi_{sl} g^{(n)}_{k_{l1} \ldots k_{lN'}} e^{i \sum\limits_{\sigma=1}^{N'} k_{l\sigma} \theta_\sigma}, \tag{19}$$

где $g^{(n)}_{k_{l1} \ldots k_{lN'}} (a_1, \ldots, a_{N_2}, \psi_1, \ldots, \psi_{N_2})$ — неизвестные функции.

Из (19) находим

$$\frac{\partial u_{ns}}{\partial \theta_p} = i \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{k_{l1}, \ldots, k_{lN'} = -\infty}^{\infty} k_{lp} \varphi_{sl} g^{(n)}_{k_{l1} \ldots k_{lN'}} e^{i \sum\limits_{\sigma=1}^{N'} k_{l\sigma} \theta_\sigma}. \tag{20}$$

Подставляя (17), (19) и (20) в (14), учитывая (8), (9), (10) и (18) определяем

$$g^{(n)}_{k_{\nu 1} \ldots k_{\nu N''}} = - \frac{i}{\left(\sum\limits_{\gamma=1}^{N'} k_{\nu\gamma} \omega_\gamma - \omega_\nu \right) \eta_\nu} f^{(n)}_{k_{\nu 1} \ldots k_{\nu N'}} e^{i \sum\limits_{l=1}^{N_2} k_{\nu l} \psi_l},$$

причем $k_{\nu\gamma} \neq \bar{k}_{\nu\gamma}$.

Если характеристическое уравнение имеет R ($R \neq N_2$) нулевых корней, то, аналогично [3], нужно в (5) положить

$$\varphi_{sl} = \varphi^*_{sl} = 0 \qquad (l = 1, \ldots, R).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы, Сб. Ин-та строит. мех. АН УССР, № 10, 1949.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
3. П. М. Сеник, Асимптотическое интегрирование нелинейных автономных систем со многими степенями свободы в области внутреннего резонанса, УМЖ, т. XII, № 3, 1960.

Поступила 3. I 1961 г.
Львов