1962 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. XIV, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Аналитические свойства вкладов от некоторых простейших диаграмм

В. И. Коломыцев

1. Манделстам предложил представление амплитуды рассеяния как функции двух комплексных переменных в следующем виде [1]

$$F(s,t,u(s,t)) = \frac{1}{\pi^2}\int ds' \int dt' \frac{F_{13}(s',t')}{(s'-s)(t'-t)} +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int ds' \int du' \frac{F_{12}(s',u')}{(s'-s)(u'-u)} + \frac{1}{\pi^2}\int dt' \int du' \frac{F_{23}(t',u')}{(t'-t)(u'-u)}. \qquad (1.1)$$

Переменные s, t, u определяются четырех-импульсами p_1, p_2, p_3, p_4 рассматриваемых частиц по формулам

$$s = (p_1+p_2)^2, \qquad t = (p_1+p_3)^2, \qquad u = (p_1+p_4)^2 \qquad (1.2)$$

и связаны соотношением

$$s+t+u = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2, \qquad (1.3)$$

где M_1, M_2, M_3, M_4 — массы частиц. Справедливость этого представления доказана только лишь в теории возмущений для диаграммы четвертого порядка. В работах Манделстама [1], Тарского [2] и Владимирова [3] показано, что амплитуда Фейнмана, соответствующая диаграмме четвертого порядка, допускает двойное спектральное представление вида

$$F(s,t) = \frac{1}{\pi^2}\int ds' \int dt' \frac{\rho(s',t')}{(s'-s)(t'-t)} \qquad (1.4)$$

при определенных ограничениях на массы частиц. В работах [1] и [3] спектральная функция ϱ вычислена в явном виде и найдена область, в которой она отлична от нуля.

В последнее время стало известно, что предложенное Иденом [4] доказательство представления (1.1) в любом порядке теории возмущений является неполным. В связи с этим представляется целесообразным изучить аналитические свойства амплитуд Фейнмана как функций двух комплексных переменных s и t, соответствующих более простым диаграммам, которые описывают процесс рассеяния (рис. 1, *а* и *б*), и диаграммам с одной замкнутой петлей, которые описывают неупругие процессы (рис. 2, *а* и *б*). В данной работе доказана справедливость двойного спектрального представления вида (1.4) для указанных диаграмм. Доказательство основано на следующей теореме о достаточных условиях существования представления вида (1.4).

Т е о р е м а. *Пусть функция $F(s, t)$ задана в виде интеграла*

$$F(s, t) = \int \frac{\prod\limits^{n} d\alpha_i \delta\left(1 - \sum\limits^{n} \alpha_i\right)}{f(\alpha)s + g(\alpha)t - K(\alpha, m_i^2, M_i^2, p_k \cdot p_k)}, \tag{1.5}$$

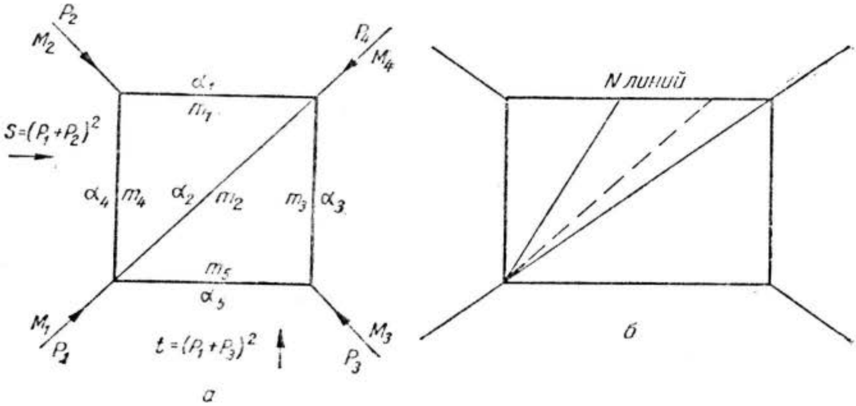

Рис. 1.

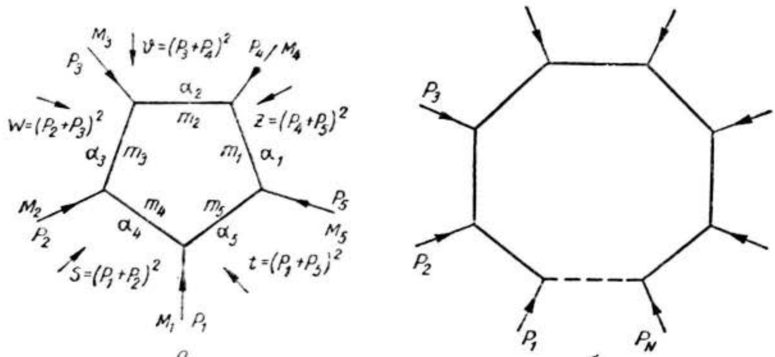

Рис. 2.

где f, g, K — однородные функции определенного порядка (f, g, K — линейные по любой переменной α_i), удовлетворяющие условиям

$$f(\alpha) = \alpha_n f_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}) \geqslant 0, \tag{1.6}$$

$$g(\alpha) = \alpha_{n-1} g_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}) \geqslant 0, \tag{1.7}$$

$$-K(\alpha, m_i^2, M_j^2, p_l \cdot p_k) = \alpha_n \alpha_{n-1} k_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}) M_i^2 -$$

$$- k_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, m_i^2, M_1^2, \ldots, M_{i-1}^2, M_{i+1}^2, \ldots,) < 0. \tag{1.8}$$

Тогда существует область $R_0 \subset R$ вещественных значений переменных m_i^2, M_j^2, $p_l \cdot p_k$, в которой функция $F(s, t)$ допускает двойное спектральное представление (1.4) (область R такова, что при всех α массовый член $K > 0$).

Отметим, что мы не можем доказать необходимости условий и, повидимому, это невозможно. Условия (1.7) и (1.8) выполняются для диаграмм лестничного типа в любом порядке теории возмущений, условие (1.6) нарушается; последнее обстоятельство приводит к значительным трудностям при изучении аналитических свойств мнимой части амплитуды рассеяния по переменной t [см. ниже (2. 14)]. Роль этих условий заключается в том, что они приводят к довольно простой зависимости мнимой части амплитуды Фейнмана от переменной t, а именно: условия (1.6) и (1.8) обеспечивают зависимость от переменной t только лишь через подынтегральную функцию, а, в силу условия (1.7), подынтегральная функция представляется в виде $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{b^2(t) - ca}}$, причем b зависит от t линейно. Нарушение условия (1.6) приводит к очень сложной зависимости мнимой части амплитуды Фейнмана от переменной t; в этом случае и подынтегральная функция, и область интегрирования зависят от t, и поэтому изучение аналитических свойств мнимой части по переменной t осуществить трудно.

В работе используется метод Владимирова [3]. Сущность метода заключается в следующем. Исходя из параметрического представления амплитуды F, сначала обычным путем устанавливаются дисперсионные соотношения по одной переменной, а затем при определенных значениях масс внешних частиц исследуются аналитические свойства мнимой части амплитуды F относительно другой комплексной переменной, в то время как первая остается вещественной. Установление аналитических свойств мнимой части амплитуды F по второй переменной достигается за счет выполнения интегрирования по двум параметрам Фейнмана. Интегрирование по одному из них осуществляется с помощью δ-функции, а по другому — элементарным путем, так как в знаменателе подынтегральной функции [см. ниже (3.4)] получается квадратный корень из квадратного трехчлена по этому параметру.

Отметим здесь, что интегрирование по двум параметрам удается осуществить только лишь для вкладов от диаграмм 2, *а* и *б*. Для вкладов от диаграмм 1, *а* и *б* аналитические свойства по t их мнимых частей следуют непосредственно из аналитических свойств подынтегральной функции $h(t)$.

В пп. 2—3 доказывается сформулированная теорема для вклада от диаграммы 2, *а;* для диаграммы 2, *б* доказательство проводится аналогично. Представление (1.4) для амплитуд Фейнмана, соответствующих диаграммам 1, *а* и *б*, доказано в п. 4.

2. Вклад в амплитуду Фейнмана от диаграммы 2, *а* можно представить в виде следующего интеграла

$$F(s, t) = \int \frac{\prod\limits^{s} d\alpha_i \delta\left(1 - \sum\limits^{5} \alpha_i\right)}{\{D(\alpha, s, t)\}^3}, \tag{2.1}$$

где

$$D(\alpha, s, t) = f(\alpha)\, s + g(\alpha)\, t - K(\alpha, m_i^2,\ M_i^2,\ p_l \cdot p_k), \tag{2.2}$$

$$f(\alpha) = \alpha_3\alpha_5, \tag{2.3}$$

$$g(\alpha) = \alpha_1\alpha_4, \tag{2.4}$$

$$- K(\alpha, m_i^2, M_i^2, p_l \cdot p_k) = -\sum^{5} \alpha_i m_i^2 + \alpha_4\alpha_5 M_1^2 + \alpha_3\alpha_4 M_2^2 + \alpha_2\alpha_3 M_3^2 + \\ + \alpha_1\alpha_2 M_4^2 + \alpha_1\alpha_5 M_5^2 + \alpha_2\alpha_5 z + \alpha_1\alpha_3 v + \alpha_2\alpha_4 w, \tag{2.5}$$

$$s = (p_1 + p_2)^2, \qquad t = (p_1 + p_5)^2, \qquad z = (p_4 + p_5)^2, \qquad v = (p_3 + p_4)^2, \\ w = (p_2 + p_3)^2, \qquad M_i^2 = p_i^2 \tag{2.6}$$

и m_i — массы внутренних частиц.

Так как мы не будем вычислять спектральную функцию $\rho(s', t')$ в явном виде, удобнее рассматривать вместо функции $F(s, t)$ функцию

$$F_\lambda(s, t) = \int \frac{\prod\limits^{5} d\alpha_i \delta\left(1 - \sum\limits^{5} \alpha_i\right)}{D_\lambda(\alpha, s, t)}, \tag{2.7}$$

связанную с $F(s, t)$ соотношением

$$F(s, t) = \frac{1}{2} \lim_{\lambda \to +0} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} F_\lambda(s, t), \tag{2.8}$$

где параметр λ введен следующим образом

$$D_\lambda(\alpha, s, t) = D(\alpha, s, t) - \lambda. \tag{2.9}$$

Выполняя интегрирование по α_5, получим

$$F_\lambda(s, t) = \int\limits_{T_4} \frac{\prod\limits^{4} d\alpha_i}{D_5(\alpha, s, t)}. \tag{2.10}$$

Здесь область интегрирования T_n — единичный симплекс в n-мерном пространстве:

$$T_n : \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leqslant 1, \qquad \alpha_i \geqslant 0, \tag{2.11}$$

а

$$D_5(\alpha, s, t) = D_\lambda(\alpha, s, t) \quad \text{при} \quad \alpha_5 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 \equiv d_4. \tag{2.12}$$

Из (2.10) при $t < 0$ непосредственно следует, что $F_\lambda(s, t)$ *является аналитической функцией переменной s в плоскости с выключенным разрезом вдоль вещественной оси* (s_0, ∞), т. е. $F_\lambda(s, t)$ можно представить в виде обычного дисперсионного интеграла

$$F_\lambda(s, t) = \int\limits_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} \Delta F_\lambda(s', t), \qquad t < 0, \tag{2.13}$$

при m_i^2, M_j^2, $p_l \cdot p_k$, принадлежащих области R, такой, что для всех $\alpha \in T_4$ массовый член $K > 0$. Область R во всех рассматриваемых случаях существует. Мнимая часть $\Delta F_\lambda(s', t)$ задана соотношением

$$\Delta F_\lambda(s', t) = \int \prod^{4} d\alpha_i \delta\{D_5(\alpha, s', t)\}, \qquad s' \geqq s_0, \tag{2.14}$$

и порог S_0 определяется из условия $\max\limits_{\alpha \in T_4} D_5(\alpha, s, t) = 0$.

3. Изучим аналитические свойства функции $\Delta F_\lambda(s', t)$ по переменной t при $s' \geqq s_0$.

Предварительно перепишем $D_5(\alpha, s', t)$ в виде

$$D_5(\alpha, s', t) = c_4 \alpha_4^2 + 2b_4 \alpha_4 + a_4, \tag{3.1}$$

где

$$c_4 = -M_1^2 > 0 \qquad \text{при} \qquad \zeta = M_1^2 < 0, \tag{3.2а}$$

$$\begin{aligned} 2b_4 = &- \alpha_3 s' + \alpha_1 t + \alpha_2 w - \alpha_2 z + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) M_1^2 - \\ &- \alpha_1 M_5^2 + \alpha_3 M_2^2 + m_5^2 - m_4^2, \end{aligned} \tag{3.2б}$$

$$a_4 = \alpha_3 (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) s' + \alpha_1 \alpha_3 v + \alpha_2 (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) z +$$

$$+\alpha_1(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)M_5^2-\sum^3\alpha_i m_i^2-(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)m_5^2+$$
$$+\alpha_2\alpha_3 M_3^2+\alpha_1\alpha_2 M_4^2-\lambda. \tag{3.2в}$$

Имеет место вспомогательная лемма.

Лемма 1. *При* $s'\geqslant s_0$, $\zeta=M_1^2<0$ *и* $t<0$ *функция* $D_5(\alpha)<0$ *в той части* T_4, *где* $a_4<0$. *Если же* $a_4\geqslant 0$, *то* $D_5(\alpha)$ *обращается в нуль на поверхности* $\alpha_4=\alpha_4^-$; *здесь*

$$\alpha_4^{\pm}=\frac{1}{c_4}\left(-b_4\pm\sqrt{b_4^2-c_4a_4}\right)- \tag{3.3}$$

корни уравнения $D_5(\alpha)=c_4\alpha_4^2+2b_4\alpha_4+a_4=0$.

Справедливость леммы непосредственно следует из (3.2а), если учесть, что при $\alpha_4=1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3\equiv d_3$ выполняется неравенство $D_5(\alpha)\equiv\equiv a_4'(t)=a_4+d_3(c_4d_3+2b_4)<0$.

Интегрируя правую часть (2.14) по α_4, получаем в силу леммы 1

$$\Delta F_\lambda(s',t)=\frac{1}{2}\int\limits_{T_3\cap(a_4\geqslant 0)}d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3\frac{1}{\sqrt{b_4^2-c_4a_4}}. \tag{3.4}$$

Отметим, что уже из (3.4) при нефизических $\zeta=M_1^2<0$ следует аналитичность $\Delta F_\lambda(s',t)$ по переменной t в плоскости с разрезом вдоль вещественной оси, так как подынтегральная функция $h_\lambda(t)=\dfrac{1}{\sqrt{b_4^2(t)-c_4a_4}}$ аналитична в указанной области, а интегрирование в правой части (3.4) происходит по области $T_3\cap(a_4\geqslant 0)$, *не зависящей от* t.

Однако так как в силу условия (1.8) область интегрирования *не зависит от переменной* $\zeta=M_1^2$, то дополнительное условие (3.2а) может быть ослаблено без нарушения ожидаемых аналитических свойств $\Delta F_\lambda(s',t)$ по t. Именно, имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Функция* $\Delta F_\lambda(s',t)$ *при* $s'\geqslant s_0$ *и* $M_1<\min(M_1^0,\zeta_0)$ *является аналитической функцией переменной* t *в плоскости с выключенным разрезом вдоль вещественной оси* $(t_0(s'),\ \infty)$, *т. е. допускает представление*

$$\Delta F_\lambda(s',t)=\int\limits_{t_0(s')}^{\infty}\frac{dt'}{t'-t}\varrho_\lambda(s',t'),\qquad s'\geqslant s_0. \tag{3.5}$$

Порог $t_0(s')$ определен ниже по (3.12), M_1^0 и ζ_0 — согласно (3.11).

Действительно, выполняя в правой части (3.4) интегрирование по α_3, получаем

$$\Delta F_\lambda(s',t)=\frac{1}{2}\int\limits_{T_2\cap(\bar\Delta_3\geqslant 0)}d\alpha_1 d\alpha_2\frac{1}{\sqrt{c_3}}\ln\frac{\sqrt{c_3}\,b_4(\alpha_3^+)+c_3\alpha_3^++b_3}{\sqrt{c_3}\,b_4(\alpha_3^-)+c_3\alpha_3^-+b_3}. \tag{3.6}$$

Здесь при интегрировании по α_3 использовано равенство

$$\Delta_4\equiv b_4^2-c_4a_4=c_3\alpha_3^2+2b_3\alpha_3+a_3, \tag{3.7а}$$

где

$$c_3=\frac{(M_2^2-M_1^2-s')^2}{4}-c_4\bar c_3, \tag{3.7б}$$

$$2b_3=\frac{2d(t)(M_2^2-M_1^2-s')}{4}-c_4 2\bar b_3, \tag{3.7в}$$

$$a_3 = \frac{d^2(t)}{4} - c_4\bar{a}_3, \tag{3.7г}$$

$$d(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 w - \alpha_2 z + (1-\alpha_1-\alpha_2) M_1^2 - \alpha_1 M_5^2 + m_5^2 - m_4^2 \tag{3.7д}$$

и $\alpha_3^{\pm}$ означают корни уравнения

$$a_4 = \bar{c}_3\alpha_3^2 + 2\bar{b}_3\alpha_3 + \bar{a}_3 = 0, \tag{3.8а}$$

где

$$\bar{c}_3 = -s' < 0, \tag{3.8б}$$

$$2\bar{b}_3 = (1-\alpha_1-\alpha_2)s' + \alpha_1 v - \alpha_2 z - m_3^2 + m_5^2 + \alpha_2 M_3^2, \tag{3.8в}$$

$$\bar{a}_3 = \alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2)z - \sum^{2} \alpha_i m_i^2 - (1-\alpha_1-\alpha_2)m_5^2 + \alpha_1\alpha_2 M_4^2 - \lambda + \\ + \alpha_1(1-\alpha_1-\alpha_2)M_5^2, \tag{3.8г}$$

$$\bar{\Delta}_3 \equiv \bar{b}_3^2 - \bar{c}_3\,\bar{a}_3. \tag{3.8д}$$

Аналитические свойства функции $\Delta F_\lambda(s', t)$ по t определяются аналитическими свойствами подынтегральной функции

$$H_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{\bar{c}_3}} \ln \frac{D(t) + 2\sigma\sqrt{\bar{\Delta}_3}}{D(t) - 2\sigma\sqrt{\bar{\Delta}_3}} \tag{3.9}$$

при α_1, $\alpha_2 \in T_2 \cap (\bar{\Delta}_3 \geqslant 0)$, т. е. точками ветвления логарифма. Здесь

$$D(t) = d(t) - \frac{\bar{b}_3}{\bar{c}_3}(M_2^2 - M_1^2 - s'), \qquad \sigma = \frac{\sqrt{c_3}}{\bar{c}_3}. \tag{3.10}$$

Так как интегрирование в правой части (3.6) происходит по вещественным значениям α_1, α_2, таким, что $\bar{\Delta}_3 \geqslant 0$ и $D(t)$ согласно (3.7д) зависит от t линейно, то точки ветвления вещественны, т. е. $\Delta F_\lambda(s', t)$ можно представить в виде (3.5), если только $c_3 > 0$ при $s' \geqslant s_0$ и $P(t) \equiv D^2(t) - 4\sigma^2\bar{\Delta}_3 = c_1\alpha_1^2 + 2b_1(\alpha_2)\alpha_1 + a_1(\alpha_2) > 0$ при $\alpha_1 = 0$. Условие $c_3 > 0$ эквивалентно требованию

$$M_1 \leqslant M_1^0 = \sqrt{s_0} - M_2. \tag{3.11а}$$

Условие $a_1(\alpha_2) > 0$ в области интегрирования обеспечивается требованием $M_1 < \zeta_0$, ζ_0—минимальное значение меньшего корня уравнения

$$a_1(\alpha_2) = c\zeta^2 + 2b\zeta + a = 0, \qquad \zeta = M_1^2 \tag{3.11б}$$

при α_2, принадлежащем области интегрирования.

Порог $t_0(s')$ определяется из условия

$$t_0(s') = \min_{\alpha_1,\alpha_2 \in T_2 \cap (\bar{\Delta}_3 \geqslant 0)} \frac{\left\{\begin{array}{l}\alpha_2 z - \alpha_2 w - (1-\alpha_1-\alpha_2)M_1^2 + \alpha_1 M_5^2 + m_4^2 - m_5^2 + \\ \quad + \frac{\bar{b}_3}{\bar{c}_3}(M_2^2 - M_1^2 - s') + 2\sigma\sqrt{\bar{\Delta}_3}\end{array}\right\}}{\alpha_1} \tag{3.12}$$

Подставляя (3. 5) в (2. 13), получаем представление (1. 4).

Легко видеть, что условия теоремы выполняются, если рассматривать F как функцию *любой другой пары переменных.*

Таким образом, *функция допускает двойное спектральное представление (1. 4) по любой паре переменных.*

Отметим в заключение, что полная амплитуда Фейнмана, равная сумме вкладов от диаграмм с возможными перестановками внешних импульсов, может не обладать этими свойствами.

4. В этом пункте кратко изложено доказательство представления (1.4) для вклада в амплитуду Фейнмана от диаграммы 1a:

$$F(s,t)=\int\frac{\prod\limits^{5}d\alpha_i\delta\left(1-\sum\limits^{5}\alpha_i\right)C^2(\alpha)}{\{D(\alpha,s,t)\}^2}, \tag{4.1}$$

где

$$D(\alpha,s,t)=f(\alpha)s+g(\alpha)t-K(\alpha,m_i^2,M_j^2), \tag{4.2}$$

$$f(\alpha)=\alpha_1\alpha_2\alpha_5, \tag{4.3}$$

$$g(\alpha)=\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \tag{4.4}$$

$$-K(\alpha,m_i^2,M_j^2)=-C(\alpha)\sum^{5}\alpha_i m_i^2+\alpha_2\alpha_4\alpha_5M_1^2+\alpha_1\alpha_4(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5)M_2^2+$$
$$+\alpha_3\alpha_5(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)M_3^2+\alpha_1\alpha_2\alpha_3M_4^2, \tag{4.5}$$

$$C(\alpha)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5)-\alpha_2^2. \tag{4.6}$$

Введем функцию

$$F_\lambda(s,t)=\int\frac{\prod\limits^{5}d\alpha_i\delta\left(1-\sum\limits^{5}\alpha_i\right)}{D_\lambda(\alpha,s,t)}, \tag{4.7}$$

связанную с $F(s,t)$ соотношением

$$F(s,t)=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to+0}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}F_\lambda(s,t) \tag{4.8}$$

и

$$D_\lambda(\alpha,s,t)=f(\alpha)s+g(\alpha)t-C(\alpha)\left[\sum^{5}\alpha_i m_i^2+\lambda\right]-k(\alpha,M_j^2). \tag{4.9}$$

Выполним в правой части (4.7) интегрирование по α_5 и представим $F_\lambda(s,t)$ в виде дисперсионного интеграла

$$F_\lambda(s,t)=\int\limits_{s_0}^{\infty}\frac{ds'}{s'-s}\Delta F_\lambda(s',t),\qquad t<0, \tag{4.10}$$

с мнимой частью $\Delta F_\lambda(s',t)$, определяемой по формуле

$$\Delta F_\lambda(s',t)=\int\prod^{4}d\alpha_i\delta\{D_5(\alpha,s',t)\},\qquad s'\geqslant s_0. \tag{4.11}$$

В отличие от рассмотренных выше диаграмм, в данном случае интегрирование можно осуществить только по одному параметру с помощью δ-функции. Выражение $D_5(\alpha,s',t)$ можно представить либо в виде:

$$D_5(\alpha,s',t)=e_4\alpha_4^3+c_4\alpha_4^2+2b_4\alpha_4+a_4, \tag{4.12а}$$

$$e_4=m_4^2-m_5^2, \tag{4.12б}$$

$$c_4=\sum^{3}\alpha_i m_i^2+(1-2\alpha_1-\alpha_2)(m_5^2-m_4^2)-\alpha_2M_1^2-\alpha_1M_2^2-\alpha_3M_3^2, \tag{4.12в}$$

$$2b_4=-\alpha_1\alpha_2s'+\alpha_2\alpha_3t-(1-2\alpha_1-\alpha_2)\sum^{3}\alpha_i m_i^2-[(\alpha_1+\alpha_2)(1-\alpha_1)-\alpha_2^2]\times$$
$$\times(m_4^2-m_5^2)+\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)M_1^2+\alpha_1(1-\alpha_1)M_2^2+\alpha_3(1-\alpha_3)M_3^2, \tag{4.12г}$$

$$a_4 = \alpha_1\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\,s' - [(\alpha_1+\alpha_2)(1-\alpha_1)-\alpha_2^2]\left[\sum^3 \alpha_i m_i^2 + \right.$$

$$\left. + (1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\,m_5^2\right| + \alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)M_3^2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 M_4^2, \quad (4.12д)$$

либо в виде:

$$D_5(\alpha, s', t) = c_3\alpha_3^2 + 2b_3\alpha_3 + a_3, \quad (4.13а)$$

$$c_3 = -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)\,M_3^2, \quad (4.13б)$$

$$2b_3 = -\alpha_1\alpha_2 s' + \alpha_2\alpha_4 t - C(\alpha)(m_3^2 - m_5^2) - \alpha_2\alpha_4 M_1^2 +$$
$$+ (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_4)\,M_3^2 + \alpha_1\alpha_2 M_4^2, \quad (4.13в)$$

$$a_3 = \alpha_1\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_4)\,s' + C(\alpha)\left[\sum^2 \alpha_i m_i^2 + \alpha_4 m_4^2 + (1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_4)\,m_5^2\right] +$$
$$+ \alpha_2\alpha_4(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_4)\,M_1^2 + \alpha_1\alpha_4(1-\alpha_1-\alpha_4)\,M_2^2. \quad (4.13г)$$

В первом случае можно осуществить интегрирование по α_4 и изучить аналитические свойства по t мнимой части $\Delta F_\lambda(s', t)$, если выбрать массы такими, чтобы выполнялись условия

$$e_4 = 0, \quad \text{т. е.} \quad m_4 = m_5, \quad (4.14а)$$

$$c_4 \geqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad M_i \leqslant m_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.14б)$$

При условиях (4.14а) и (4.14б) мнимая часть запишется в виде:

$$\Delta F_\lambda(s', t) = \int\limits_{T_3 \cap (a_4 \geqslant 0)} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \frac{1}{\sqrt{b_4^2 - c_4 a_4}}. \quad (4.15)$$

Так как область интегрирования $T_3 \cap (a_4 \geqslant 0)$ не зависит от t и такова, что $c_4 \geqslant 0$, $a_4 \geqslant 0$, то $\Delta F_\lambda(s', t)$ является аналитической функцией t в плоскости с разрезом вдоль вещественной оси, потому что в этой области аналитична подынтегральная функция $h_\lambda(t) = \dfrac{1}{\sqrt{b_4^2(t) - c_4 a_4}}$.

Таким образом, применяя к $\Delta F_\lambda(s', t)$ теорему Коши, можно получить (3.5) и, следовательно, представление (1.4).

Во втором случае представление (1.4) следует только при нефизическом условии $\zeta = M_3^2 < 0$, так как осуществить аналитическое продолжение по ζ невозможно без детального изучения поведения корней уравнения четвертой степени $\Delta_3 \equiv b_3^2 - c_3 a_3 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Mandelstam, Analytic Properties of Transition Amplitudes in Perturbation Theory, Phys. Rev., 115, 1959, 1741—1751.
2. J. Tarski, Spectral Representations in Perturbation Theory. J. Math. Physics, I, 1960.
3. В. С. Владимиров, О двойном спектральном представлении амплитуды Фейнмана для диаграммы четвертого порядка, УМЖ, XII, № 2, 1960, 132.
4. R. Eden, Proof of the Mandelstam Representation for Every Order in Perturbation Theory, Phys. Rev., 121, 1961, 1567.

Поступила 30. VIII 1961 г.
Киев

Analytical properties of contributions to the Feynman amplitude from some very simple diagrams

V. I. Kolomytsev

Summary

A study is made of the analytical properties of contributions to the Feynman amplitude from very simple diagrams. The double spectral representation is shown to be valid for the contributions from diagrams 1, 2 under some restrictions as to the mass variables.