1962 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. XIV, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

К асимптотике распределений максимальных уклонений в пуассоновском процессе

В. С. Королюк, Д. В. Гусак

Для распределений максимальных уклонений в пуассоновском процессе обычно определяются точные выражения, которые являются исходными в асимптотическом анализе (см., например, [1—4]). В настоящей работе для асимптотического анализа указанных распределений применяется метод последовательного исчерпывания невязок (см. [5]), приводящий к уравнениям для членов асимптотики.

1. Пусть ζ_t — сепарабельный пуассоновский процесс с параметром λ, так что

$$p_\lambda(k,t)=\mathscr{P}\{\zeta_t=k\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\qquad (k=0,1,2\ldots). \tag{1}$$

Мы будем изучать асимптотическое поведение при $\lambda\to\infty$ функции распределения максимальных уклонений центрированного пуассоновского процесса $\eta_t=\dfrac{\zeta_t-\lambda t}{\sqrt{\lambda}}$

$$\Pi_\lambda(k,t;\ z_-,z_+)=\mathscr{P}(\zeta_t=k;\ \max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\eta_\tau<z_+;\ \min_{0\leqslant\tau\leqslant t}\eta_\tau>z_-\}, \tag{2}$$

где $z_-<0<z_+$.

Исходным пунктом в асимптотическом анализе распределения (2) служит граничная задача для дифференциально-разностного уравнения.

Лемма 1. *Для решения $u_\lambda(k,t)$ уравнения*

$$\boldsymbol{P}_\lambda u_\lambda\equiv\frac{du_\lambda(k,t)}{dt}-\lambda\left[u_\lambda(k-1,t)-u_\lambda(k,t)\right]=0\qquad (k\geqslant 1,\quad t\geqslant 0) \tag{3}$$

в условиях

$$\begin{aligned}
&u_\lambda(0,\tau)=0, && 0\leqslant\tau\leqslant t_0^-=-\frac{z_-}{\sqrt{\lambda}},\\
&u_\lambda(k,0)=0, && 0\leqslant k\leqslant z_+\sqrt{\lambda},\\
&u_\lambda(k,t_k^+)=p_\lambda(k,t_k^+), && k>z_+\sqrt{\lambda},\qquad t_k^+=\frac{k-z_+\sqrt{\lambda}}{\lambda},\\
&u_\lambda(k,\tau)=p_\lambda(k,\tau), && t_k^-\leqslant\tau<t_{k+1}^-,\qquad t_k^-=\frac{k-z_-\sqrt{\lambda}}{\lambda}
\end{aligned} \tag{4}$$

имеет место соотношение

$$u_\lambda(k,t)=p_\lambda(k,t)-\Pi_\lambda(k,t;\ z_-,z_+). \tag{5}$$

Утверждение леммы следует из того известного факта, что функции распределения (1) и (2) являются решениями уравнения (8) при следующих условиях

$$p_\lambda(-1,\tau)=0, \qquad \tau>0,$$
$$p_\lambda(0,0)=1, \qquad p_\lambda(k,0)=0, \qquad k>0 \tag{6}$$

и

$$\Pi_\lambda(k,t_k^+)=0, \qquad \Pi_\lambda(k,\tau)=0, \qquad \tau \geqslant t_k^-,$$
$$\Pi_\lambda(k,\tau)=p_\lambda(k,\tau), \qquad 0\leqslant k<z_+\sqrt{\lambda}, \qquad 0\leqslant\tau\leqslant t_0^-. \tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что условия (4) определяют единственным образом решение уравнения (3).

2. Воспользуемся уточнением локальной предельной теоремы для центрированного пуассоновского процесса η_t (которое может быть получено методами [6, гл. 8]):

$$\sqrt{\lambda}\,p_\lambda(k,t)=p_0(x,t)+\sum_{r=1}^{N+2}\lambda^{-r/2}p_r(x,t)+O\left(\lambda^{-\frac{N+3}{2}}\right), \tag{8}$$

где $x=\dfrac{k-\lambda t}{\sqrt{\lambda}}$, $\quad p_0(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$, $\quad p_r(x,t)=t^{-r/2}P_r(-\varphi(u))$,

$$\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}, \qquad u=\frac{x}{\sqrt{t}}.$$

Определение $P_r(-\varphi)$ см. [6, гл. 8].

Следующая теорема определяет алгоритм построения асимптотического разложения для распределения (2).

Теорема 1. *Для распределения $\Pi_\lambda(k,t;\ z_-,z_+)$ [см. (2)] максимальных уклонений пуассоновского процесса имеет место асимптотическое представление при $\lambda\to\infty$*

$$\sqrt{\lambda}\,\Pi_\lambda(k,t;\ z_-,z_+)=\sum_{r=0}^{N}\lambda^{-r/2}\left[p_r(x,t)-u_r(x,t)\right]-$$
$$-\sum_{r=1}^{N-1}\lambda^{-\frac{r+1}{2}}V_r(k-\lambda t-z_-\sqrt{\lambda},t)+o\left(\lambda^{-\frac{N}{2}}\right), \tag{9}$$

в котором $x=\dfrac{k-\lambda t}{\sqrt{\lambda}}$; *регулярные члены асимптотики $u_r(x,t)$ определяются из рекуррентной системы дифференциальных уравнений*

$$L_0u_0\equiv\frac{\partial u_0}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}=0, \tag{10}$$

$$L_0u_r=\sum_{m=1}^{r}\frac{(-1)^m}{(m+2)!}\frac{\partial^{m+2}u_{r-m}}{\partial x^{m+2}}, \qquad 1\leqslant r\leqslant N, \tag{11}$$

в условиях

$$u_r(x,0)=0; \qquad u_r(z_+,t)=p_r(z_+,t), \qquad u_r(z_-,t)=p_r(z_-,t)-V_{r-1}(-0,t)$$
$$(0\leqslant r\leqslant N, \qquad V_{-1}\equiv0); \tag{12}$$

погранслои $V_r(s,t)$ определяются на полуоси $s\geqslant0$ в классе функций, абсолютно интегрируемых по s, из уравнений

$$\boldsymbol{P}_0V_r\equiv\int_0^1(1-y)\,V_r(s-y,t)\,dy=0 \qquad (s\geqslant0, \quad r=0,1), \tag{13}$$

$$\boldsymbol{P}_0 V_r = \int_s^{\infty} (s-y) \frac{\partial V_{r-2}(y,t)}{\partial t} dy \qquad (s \geqslant 0, \quad 2 \leqslant r \leqslant N-1) \tag{14}$$

в условиях при $s < 0$

$$V_r(s,t) = V_r(-0,t) - \sum_{m=1}^{r+1} \frac{s^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} [u_{r+1-m}(x,t) - p_{r+1-m}(x,t)]_{x=z_-}$$

$$(0 \leqslant r \leqslant N-1), \tag{15}$$

где $V_r(-0,t)$ определяются из уравнений (13) и (14) при $s=0$.

3. Доказательство теоремы 1 проведем в соответствии с общей схемой асимптотического анализа, изложенной в [5].

Для определения уравнений (10) и (11) для регулярных членов асимптотики $u_r(x,t)$ построим расщепление исходного оператора $\boldsymbol{P}_\lambda$, определяющего уравнение (3), на классе бесконечно дифференцируемых функций.

Лемма 2. *Для бесконечно дифференцируемой функции* $u(x,t)$ *при* $x = \dfrac{k-\lambda t}{\sqrt{\lambda}}$ *имеет место разложение*

$$\boldsymbol{P}_\lambda u(x,t) \equiv \boldsymbol{L}_0 u + \sum_{m=1}^{N} \lambda^{-m/2} \frac{(-1)^{m+1}}{(m+2)!} \frac{\partial^{m+2} u}{\partial x^{m+2}} + \lambda^{-\frac{N+1}{2}} \boldsymbol{R}_{N,\lambda} u, \tag{16}$$

где

$$\boldsymbol{R}_{N,\lambda} u \equiv \frac{(-1)^{N+2}}{(N+3)!} \frac{\partial^{N+3}}{\partial x^{N+3}} \left[u\left(x - \frac{\vartheta}{\sqrt{\lambda}}, t \right) \right] \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1). \tag{17}$$

Утверждение леммы 2 получим из соотношения

$$\boldsymbol{P}_\lambda u\left(\frac{k-\lambda t}{\sqrt{\lambda}}, t\right) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sqrt{\lambda} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} -$$

$$- \lambda \left[u\left(x - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, t \right) - u(x,t) \right], \tag{18}$$

разлагая по x в ряд Тейлора функцию $u\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}, t\right)$.

Для вывода уравнений (13) и (14) для погранслоев $V_r(s,t)$ построим другое расщепление исходного оператора $\boldsymbol{P}_\lambda$.

Лемма 3. *Для функции* $V(s,t)$, *абсолютно интегрируемой по* $s \geqslant 0$ *с любой степенью* s *и дифференцируемой по* s *и* t, *при* $s = k - \lambda t - z_- \sqrt{\lambda} > 0$ *имеет место представление*

$$\int_s^{\infty} (s-y) \boldsymbol{P}_\lambda V(y,t)\, dy = -\lambda \int_0^1 (1-y) V(s-y,t)\, dy +$$

$$+ \int_s^{\infty} (s-y) \frac{\partial V(y,t)}{\partial t} dy. \tag{19}$$

Для доказательства заметим, что при $s = k - \lambda t - z_- \sqrt{\lambda}$

$$\boldsymbol{P}_\lambda V(k - \lambda t - z_- \sqrt{\lambda}, t) = -\lambda \left[\frac{\partial V(s,t)}{\partial s} - V(s,t) + V(s-1,t) \right] + \frac{\partial V(s,t)}{\partial t}.$$

Дважды интегрируя это соотношение по s до бесконечности, получим (19).

Отметим важные в дальнейшем свойства асимптотического представления (9).

Лемма 4. *1°. Регулярные члены асимптотики $u_r(x, \tau)$, определяемые из уравнений (10), (11) в условиях (12), в замкнутом прямоугольнике $Q\{z_- \leqslant x \leqslant z_+;\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$, имеют ограниченные производные по x и τ сколь угодно высокого порядка и стремятся к нулю при $\tau \to 0$ быстрее любой степени τ.*

2°. Погранслои $V_r(s, t)$, определяемые из уравнений (13), (14) в условиях (15), стремятся к нулю при $s \to \infty$ быстрее любой степени $^1/_s$ и ограничены при $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ вместе со своими производными по t.

Для доказательства заметим, что

$$u_0(x, t) = p_0(x, t) - p_Q(x, t;\ 0, 0), \tag{20}$$

где $p_Q(x, t; y, \tau)$ — функция Грина уравнения теплопроводности (10) в области Q, а $p_0(x, t)$ — фундаментальное решение уравнения (10). Учитывая вид членов разложения (8), получаем первое утверждение леммы.

Второе утверждение леммы следует из того, что уравнения (13), (14) являются уравнениями вольтерровского типа, свободные члены которых обладают свойствами, указанными в лемме.

Определим теперь невязку суммы

$$u_{N,\lambda}(x, t) = \sum_{r=0}^{N} \lambda^{-r/2} u_r(x, t) + \sum_{r=0}^{N+1} \lambda^{-\frac{r+1}{2}} V_r(\sqrt{\lambda}(x - z_-), t) \tag{21}$$

в исходном уравнении (3).

Лемма 5. *При $x = \dfrac{k - \lambda t}{\sqrt{\lambda}}$ имеет место соотношение*

$$\boldsymbol{P}_\lambda u_{N,\lambda} = \lambda^{-\frac{N+1}{2}} \left\{ \sum_{m=0}^{N} \boldsymbol{R}_{N-m,\lambda} u_m + \frac{\partial}{\partial t} [V_N + \lambda^{-1/2} V_{N+1}] \right\}. \tag{22}$$

Для вычисления $\boldsymbol{P}_\lambda u_{N,\lambda}$ нужно воспользоваться разложениями (16) и (19) и соотношениями (10), (11), (13), (14).

Вычислим невязки суммы (21) в граничных условиях (4), полагая при $s < 0$ $V_N(s, t) = V_N(-0, t)$, $V_{N+1}(s, t) = V_{N+1}(-0, t)$.

Лемма 6. *Для суммы (21) граничные условия (4) имеют вид: при $0 \leqslant \tau \leqslant -\dfrac{z_-}{\sqrt{\lambda}}$*

$$u_{N,\lambda}(-\tau\sqrt{\lambda}, \tau) = 0(\lambda^{-\frac{N+1}{2}}), \tag{23}$$

при $0 \leqslant k \leqslant z_+\sqrt{\lambda}$

$$u_{N,\lambda}\left(\frac{k}{\sqrt{\lambda}}, 0\right) = 0, \tag{24}$$

при $k > z_+\sqrt{\lambda}$, $\quad t_k^+ = \dfrac{k - z_+\sqrt{\lambda}}{\lambda}$

$$u_{N,\lambda}(z_+, t_k^+) = \sqrt{\lambda}\, p_\lambda(k, t_k^+) + O(\lambda^{-\frac{N+1}{2}}), \tag{25}$$

при $\tau \leqslant t_k^- + \dfrac{\vartheta}{\lambda}$, $\quad t_k^- = \dfrac{k - z_-\sqrt{\lambda}}{\lambda}$, $\quad k \geqslant 0$, $\quad 0 \leqslant \vartheta < 1$

$$u_{N,\lambda}\left(z_- - \frac{\vartheta}{\sqrt{\lambda}}, \tau\right) = \sqrt{\lambda}\, p_\lambda\left(z_- - \frac{\vartheta}{\sqrt{\lambda}}, \tau\right) + O(\lambda^{-\frac{N+1}{2}}). \tag{26}$$

Доказательство. Условия (23) и (24) вытекают из свойств членов асимптотики в (21), сформулированных в лемме 4. Условие (25) следует из условий (12) и свойств погранслоев (см. лемму 4). Чтобы получить условие (26), нужно разложить регулярные члены асимптотики в сумме (21) и в (8) в ряд Тейлора по x в окрестности точки z_- и воспользоваться условиями (12) и (15).

Теперь доказательство теоремы 1 завершается построением верхних и нижних функций для решения $u_\lambda(k,t)$ уравнения (3) в условиях (4).

Лемма 7. *Если функция $u(k,t)$ удовлетворяет неотрицательным граничным условиям, однозначно определяющим решение уравнения (3), и имеет место соотношение $\boldsymbol{P}_\lambda u(k,t) \geqslant 0$, то при всех $k \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ имеет место соотношение $u(k,t) \geqslant 0$.*

Для доказательства леммы положим

$$u(k,t) = e^{-\lambda t} w(k,t),$$

тогда

$$\boldsymbol{P}_\lambda u(k,t) = e^{-\lambda t}\left[\frac{dw(k,t)}{dt} - \lambda w(k-1,t)\right],$$

откуда

$$w(k,t) = \int\limits_{\max(0,t_k^+)}^{t} [e^{-\lambda t}\boldsymbol{P}_\lambda u(k,\tau) + \lambda w(k-1,\tau)]\,d\tau \qquad (k \geqslant 0, \quad t \geqslant 0).$$

И так как по условию подынтегральное выражение неотрицательно, то и $w(k,t) \geqslant 0$, а значит, и $u(k,t) \geqslant 0$.

Лемма 8. *Функции*

$$\overline{u}_{N,\lambda} = u_{N,\lambda} + \alpha_\lambda \lambda^{-\frac{N}{2}} t, \qquad \underline{u}_{N,\lambda} = u_{N,\lambda} - \alpha_\lambda \lambda^{-\frac{N}{2}} t,$$

где $\alpha_\lambda \to 0$ при $\lambda \to \infty$ и $\alpha_\lambda \sqrt{\lambda} \to \infty$, являются соответственно верхней и нижней функциями задачи (3)—(4), т. е. при $x = \dfrac{k-\lambda t}{\sqrt{\lambda}}$ имеют место неравенства

$$\underline{u}_{N,\lambda}(x,t) \leqslant \sqrt{\lambda}\, u_\lambda(k,t) \leqslant \overline{u}_{N,\lambda}(x,t). \tag{27}$$

Доказательство. Учитывая лемму 6, без труда проверяем, что

$$\overline{u}_{N,\lambda}(x,t) - \sqrt{\lambda}\, u_\lambda(k,t) \geqslant 0$$

в граничных точках задачи (3)—(4). Учитывая лемму 5, получаем

$$\boldsymbol{P}_\lambda[\overline{u}_{N,\lambda} - \sqrt{\lambda}\, u_\lambda] \geqslant 0.$$

Следовательно, по лемме 7 получаем второе неравенство (27). Аналогично доказывается первое неравенство (27).

Итак, из (15), (8) и (27) получаем обоснование асимптотического представления (9).

4. Учитывая свойство погранслоев, указанное в лемме 4, и определяя регулярные члены асимптотики из уравнений (10), (11), получаем следствие.

Следствие. Имеет место асимптотическое представление

$$\sqrt{\lambda}\,\Pi_\lambda(k,t;\ z_+, z_-) = \Pi_0(x,t) + \lambda^{-1/2}\Pi_1(x,t) + \lambda^{-1}\Pi_2(x,t) + o(\lambda^{-1}) \tag{28}$$

равномерно по x в каждом отрезке, содержащемся в интервале (z_-, z_+).

Здесь $x = \dfrac{k-\lambda t}{\sqrt{\lambda}}$,

$$\Pi_0(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \varphi(t, x-2z_k), \tag{29}$$

$$\Pi_1(x,t)=\frac{1}{6}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k[x\varphi''(t,x-2z_k)-2k\varphi'(t,x-2z_k)]+$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi'(t,x-2z_{2k}), \tag{30}$$

$$\Pi_2(x,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[(-1)^k\left(\frac{1}{36}+\frac{k^2}{18}\right)\varphi''(t,x-2z_k)+\right.$$

$$\left.+\frac{1-4k}{18}\varphi''(t,x-2z_{2k})\right]+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[(-1)^k\frac{x-2z_k-2kx}{36}\times\right.$$

$$\left.\times\varphi'''(t,x-2z_k)+\frac{x}{18}\varphi'''(t,x-2z_{2k})\right]+\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2}{72}\varphi^{\mathrm{IV}}(t,x-2z_k), \tag{31}$$

$$z=z_+-z_-,\qquad z_{2k}=kz,\qquad z_{2k+1}=kz+z_+.$$

Совершенно аналогично с соответствующими упрощениями могут быть построены асимптотические разложения для распределений

$$\Pi_\lambda^+(k,t;\ z_+)=\mathscr{P}\{\zeta_t=k,\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\eta_\tau<z_+\} \tag{32}$$

и

$$\Pi_\lambda^-(k,t;\ z_-)=\mathscr{P}\{\zeta_t=k,\min_{0\leqslant\tau\leqslant t}\eta_\tau>z_-\}. \tag{33}$$

Теорема 2. *Распределения* $\Pi_\lambda^\pm(k,t;\ z_\pm)$ *при* $x=\dfrac{k-\lambda t}{\sqrt{\lambda}}$ *и* $x>z_-$ *соответственно представимы в виде*

$$\sqrt{\lambda}\,\Pi_\lambda^\pm(k,t;\ z_\pm)=\Pi_0^\pm(x,t)+\lambda^{-1/2}\Pi_1^\pm(x,t)+\lambda^{-1}\Pi_2^\pm(x,t)+o(\lambda^{-1}), \tag{34}$$

где

$$\Pi_0^\pm(x,t)=\varphi(t,x)-\varphi(t,x-2z_\pm), \tag{35}$$

$$\Pi_1^+(x,t)=p_1(t,x)-p_1(t,x-2z_+)+\frac{2}{3}\varphi'(t,x-2z_+)-\frac{z_+}{3}\varphi''(t,x-2z_+), \tag{36}$$

$$\Pi_2^+(x,t)=p_2(t,x)-p_2(t,x-2z_+)-\frac{z_+-x}{9}\varphi'''(t,x-2z_+)-$$

$$-\frac{z_+(x-z_+)}{18}\varphi^{\mathrm{IV}}(t,x-2z_+), \tag{37}$$

$$\Pi_1(x,t)=p_1(t,x)-p_1(t,x-2z_-)-\frac{z_-}{3}\varphi''(t,x-2z_-), \tag{38}$$

$$\Pi_2(x,t)=p_2(t,x)-p_2(t,x-2z_-)-\frac{z_-}{9}\varphi'''(t,x-2z_-)-$$

$$-\frac{z_-(x-2z_-)}{18}\varphi^{\mathrm{IV}}(t,x-2z_-). \tag{39}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Смирнов, Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным, Усп. матем. наук, т. X, 1944, 179—206.
2. Чжан Ли-цянь, О точном распределении статистики А. Н. Колмогорова и его асимптотическом разложении, Acta Math. Sinica, **6**, 1956, 55—81.
3. D. A. Darlyng, Sur les Théorémes de Kolmogorov — Smirnov, Теор. вер. и ее применения, т. 5, в. 4, 1960, 393—398.
4. P. Pyke, Supremum and infimum of the Poisson process, Ann. Math. Statistics, **30**, N 2, 1959, 568—576.
5. В. С. Королюк, О методе построения асимптотических разложений, Теор. вер. и ее применения, т. 6, в. 3, 1961, 359—362.
6. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.

Поступила 26.XII 1961 г.

Киев

On the asymptoticity of distributions of maximum deviation in a Poisson process

V. S. Korolyuk, D. V. Gusak

Summary

The author discusses the algorithm of asymptotic expansions for the distribution of maximum deviations in a Poisson process leading to equations for the terms of the asymptotic.