Одно замечание относительно роста собственных функций самосопряженных операторов

Ю. М. Березанский, Ю. Б. Орочко

Физические соображения подсказывали, что собственные функции уравнения Шредингера

$$-\Delta u + q(x)u = \lambda u, \tag{1}$$

которое рассматривается во всем n-мерном пространстве E_n, должны быть ограничены, если только потенциал q полуограничен снизу: $q(x) \geq c > -\infty$. Э. Э. Шноль [1], рассматривая близкие вопросы, пришел к заключению, что при $n = 1$ почти все в смысле спектральной плотности $d\varrho(\lambda)$ собственные функции растут на бесконечности не быстрее $C|x|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$). Затем были предприняты попытки доказать предположение об ограниченности собственных функций ([2], [3]), однако в рассуждениях обнаружились погрешности. Недавно В. П. Маслов [4] опубликовал пример, показывающий, что это предположение, вообще говоря, несправедливо.

Вместе с тем результаты типа Э. Э. Шноля удалось получить для более общих случаев. Именно, была доказана следующая общая теорема (Ю. М Березанский, Г. И. Кац, А. Г. Костюченко, она опубликована в [5]):

Рассмотрим пространство L_2 функций $f(x)$ на локально компактном пространстве R, суммируемых с квадратом по некоторой мере dx, конечной на компактных множествах. Пусть A — самосопряженный оператор, действующий в L_2. Предположим, что существует функция $\gamma(\lambda) \neq 0$ ($-\infty < \lambda < \infty$) такая, что $\gamma(A)$ является интегральным оператором с ядром $K(x, y)$ ($x, y \in R$), для которого: а) почти для всех $y \in R$

$$\int_R |K(x, y)|^2\, dx = C(y) \leqslant C < \infty^* \tag{2}$$

и б) найдется функция $\alpha(x) \geqslant 1$ такая, что $\frac{1}{\alpha} \in L_2$ и интеграл

$$\int_R |K(x, y)|^2 \alpha(y)\, dy = \beta(x)$$

существует при каждом x и является функцией, ограниченной на каждом компакте. При этих предположениях ϱ-почти все собственные функции $\varphi(x; \lambda)$ оператора A [являющиеся обычными функциями благодаря (2)] допускают оценку

$$|\varphi(x; \lambda)| \leq C_1 \gamma(\lambda) \sqrt{\beta(x)} \qquad (x \in R). \tag{3}$$

---

* В случае $L_2 = l_2$ условие а) всегда выполнено: достаточно положить $\gamma(A) = E$. В связи с этим, например, для разностных уравнений последующие утверждения значительно упрощаются.

Из (3), в частности, вытекает следующая оценка ϱ-почти всех собственных функций уравнения (1)

$$\varphi(x;\lambda) \underset{|x|\to\infty}{=} O(|x|^{\frac{n}{2}+\varepsilon}) \qquad (\varepsilon > 0) \tag{4}$$

(см. [5]), обобщающая на n-мерный случай результат Э. Э. Шноля.

Приведенная теорема хотя и навеяна соображениями, связанными с получением разложений по обобщенным собственным функциям, однако не использует основной идеи А. Г. Костюченко, примененной им в работе [2] и заключающейся в попытке дифференцировать $(E_\lambda f)(x)$ (E_λ — разложение единицы A, $f \in L_2$), понимаемую как функционал над L_1. Ниже мы покажем, что эта идея может быть все же применена для получения оценок роста даже при меньших ограничениях на оператор A, правда, оценки типа (3), (4) будут осредненными. Именно, справедлива

Теорема 1. *Пусть $R = E_n$, dx — обычная лебегова мера, интеграл (2) сходится, причем функция $C(y)$ локально ограничена (ее равномерная ограниченность константой C и условие б) не предполагаются) и $\varepsilon, \delta_1, \delta_2 > 0$. Тогда ϱ-почти все собственные функции $\varphi(x;\lambda)$ оператора A удовлетворяют оценке*

$$\int\limits_{|x-\xi_2|<\delta_2} \int\limits_{|\xi_2-\xi_1|<\delta_1} \varphi(\xi_1;\lambda)\, d\xi_1 d\xi_2 \underset{|x|\to\infty}{=} O(|x|^{\frac{n}{2}+\varepsilon})^*. \tag{5}$$

Доказательство будем проводить, дифференцируя не $E_\lambda f$, а операторную меру $E(\Delta)$, где Δ — борелевские множества на оси (ср. [5]). Мы воспользуемся следующей теоремой (см. Фояш, [6]): *пусть имеется операторная мера $\Theta(\Delta)$, значениями которой служат ограниченные операторы, действующие из B в E^*, где B и E — сепарабельные банаховы пространства. Если сильная вариация $\operatorname{Var}\Theta$ локально ограничена, то $\Theta(\Delta)$ можно продифференцировать по обычной мере $\sigma(\Delta) = \underset{\Delta}{\operatorname{Var}}\,\Theta$, полученная производная действует из B в E^* и $\Theta(\Delta)$ восстанавливается посредством интеграла; норма этой производной почти всюду равна 1.*

Рассмотрим интегральный оператор Γ с ядром

$$\Gamma(x, y) = \frac{\varkappa_{(0,\delta_2)}(|x-y|)}{1+|y|^{\frac{n}{2}+\varepsilon}}, \tag{6}$$

где $\varkappa_{(a,b)}$ — характеристическая функция интервала (a, b). Так как

$$\int\limits_{E_n} |(\Gamma f)(x)|^2\, dx = \int\limits_{E_n} \left| \int\limits_{|x-\xi|<\delta_2} \frac{f(\xi)}{1+|\xi|^{\frac{n}{2}+\varepsilon}}\, d\xi \right|^2 dx \leq$$

$$\leqslant \int\limits_{E_n} \frac{1}{[1+||x|-\delta_2|^{\frac{n}{2}+\varepsilon}]^2} \left(\int\limits_{|x-\xi|<\delta_2} |f(\xi)|\, d\xi \right)^2 dx \leq$$

$$\leq \|f\|_{L_1}^2 \int\limits_{E_n} \frac{dx}{[1+||x|-\delta_2|^{\frac{n}{2}+\varepsilon}]^2},$$

* Из доказательства теоремы будет видно, что $|x|^{\frac{n}{2}+\varepsilon}$ может быть заменена достаточно произвольной функцией $\alpha(x) \geq 1$ такой, что $\frac{1}{\alpha} \in L_2$.

то Γ можно рассматривать как непрерывно действующий из пространства L_1 в L_2. Сопряженный оператор Γ^*, задающийся ядром $\overline{\Gamma(y, x)} = \Gamma(y, x)$, будет непрерывно действовать из L_2 в $L_1^* = M$ (M — пространство в существенном ограниченных функций). Наряду с оператором Γ рассмотрим оператор J с ядром $J(x, y) = \varkappa_{(0,\delta_1)}(|x-y|)$, этот оператор непрерывен в L_2 и самосопряжен. Образуем произведение $\Theta(\Delta) = \Gamma^* J E(\Delta) J \Gamma$, $\Theta(\Delta)$ непрерывно действует из L_1 в M и является операторной мерой по Δ. Покажем ограниченность $\operatorname{Var}\Theta$ на всей оси $(-\infty, \infty)$.

Положим $\omega_x(\xi) = \varkappa_{(0,\delta_1)}(|x-\xi|) = \omega_\xi(x)$. Если C — некоторый ограниченный оператор в L_2, то легко видеть, что JCJ будет интегральным оператором с непрерывным ядром $F(x, y) = (C\omega_y, \omega_x)$. Пусть $P_\Delta(x, y)$ — ядро оператора $JE(\Delta)J$, имеем

$$P_\Delta(x, x) = (E(\Delta)\omega_x, \omega_x) \leq \|\omega_x\|^2 = \int_{E_n} \varkappa_{(0,\delta_1)}(|x-\xi|)\, d\xi = m. \tag{7}$$

Далее, ядро $P_\Delta(x, y)$ положительно определено; при фиксированном x $P_\Delta(x, x) = (E(\Delta)\omega_x, \omega_x)$ является мерой по Δ.

Пусть интервалы $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ не пересекаются. Так как $\Theta(\Delta)$ действует из L_1 в M, то норма этого интегрального оператора равна sup модуля его ядра. Учитывая (7), получаем (ниже обозначено $\alpha(x) = 1 + |x|^{\frac{n}{2}+\varepsilon}$):

$$\sum_j \|\Theta(\Delta_j)\| = \sum_j \|\Gamma^* J E(\Delta_j) J \Gamma\| =$$

$$= \sum_j \sup_{x,y} \left| \int_{E_n}\int_{E_n} \Gamma(\xi, x) P_{\Delta_j}(\xi, \eta) \Gamma(\eta, y)\, d\xi d\eta \right| \leqslant$$

$$\leq \sum_j \sup_{x,y} \left\{ \int_{E_n} \Gamma(\xi, x) \sqrt{P_{\Delta_j}(\xi, \xi)}\, d\xi \cdot \int_{E_n} \Gamma(\eta, y) \sqrt{P_{\Delta_j}(\eta, \eta)}\, d\eta \right\} =$$

$$= \sum_j \sup_x \left\{ \int_{E_n} \Gamma(\xi, x) \sqrt{P_{\Delta_j}(\xi, \xi)}\, d\xi \right\}^2 \leqslant \sum_j \sup_x \int_{E_n} \Gamma^2(\xi, x)\, \alpha^2(\xi)\, d\xi \times$$

$$\times \int_{E_n} \frac{P_{\Delta_j}(\xi, \xi)}{\alpha^2(\xi)}\, d\xi = \sup_x \int_{E_n} \Gamma^2(\xi, x)\, \alpha^2(\xi)\, d\xi \cdot \int_{E_n} \frac{P_{\cup\Delta_j}(\xi, \xi)}{\alpha^2(\xi)}\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant m \int_{E_n} \frac{d\xi}{\alpha^2(\xi)} \cdot \sup_x \frac{1}{(1 + |x|^{\frac{n}{2}+\varepsilon})^2} \int_{|x-\xi|<\delta_2} (1 + |\xi|^{\frac{n}{2}+\varepsilon})^2 d\xi = C_2. \tag{8}$$

В этой оценке C_2 не зависит от выбора Δ_j на $(-\infty, \infty)$, поэтому $\operatorname*{Var}_{(-\infty,\infty)} \Theta < \infty$.

Таким образом, можно продифференцировать $\Theta(\Delta)$ по $\sigma(\Delta) = \operatorname*{Var}_{\Delta} \Theta$, полученная производная $\Phi(\lambda)$ является оператором, непрерывно действующим из L_1 в M, причем $\Theta(\Delta) = \int_\Delta \Phi(\lambda)\, d\sigma(\lambda)$. Очевидно, мера $\sigma(\Delta)$ абсолютно непрерывна относительно $\varrho(\Delta)$, поэтому обозначая $d\sigma(\lambda)/d\varrho(\lambda) = R(\lambda)$, перепишем последнюю формулу в виде

$$\Theta(\Delta) = \int_\Delta \Phi(\lambda) R(\lambda)\, d\varrho(\lambda). \tag{9}$$

До сих пор мы нигде не пользовались локальной ограниченностью и даже конечностью функции $C(y)$, сейчас мы ее используем. Хорошо известно, что это условие обеспечивает существование у оператора A полной системы обычных собственных функций, точнее, $E(\Delta)$ в этом случае является интегральным оператором с ядром $E_\Delta(x, y) = \int\limits_\Delta \psi(x, y;\ \lambda)\, d\varrho(\lambda)$, где $\psi(x, y;\ \lambda)$ — спектральная функция; $\psi(x, y;\ \lambda)$ локально входит по (x, y, λ) в L_2 относительно меры $dx\, dy\, d\varrho(\lambda)$ (подобные утверждения имеются, например, в [5], [7]). Отсюда следует, что $\Theta(\Delta)$ — интегральный оператор с ядром

$$\int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n} \Gamma(\xi_2, x)\Gamma(\eta_2, y) \int\limits_{|\xi_2-\xi_1|<\delta_1}\ \int\limits_{|\eta_2-\eta_1|<\delta_1} \left\{\int\limits_\Delta \psi(\xi_1, \eta_1;\ \lambda)\, d\varrho(\lambda)\right\} d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2.$$

Учитывая локальную суммируемость $\psi(x, y;\ \lambda)$ по (x, y, λ) и (9), получаем для финитных ограниченных f, g:

$$\int\limits_\Delta R(\lambda)(\Phi(\lambda) f, g)\, d\varrho(\lambda) = (\Theta(\Delta) f, g) = \int\limits_\Delta \int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n} S(x, y;\ \lambda) f(y) \overline{g(x)}\, dx\, dy\, d\varrho(\lambda), \tag{10}$$

$$S(x,y;\lambda) = R(\lambda) \int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n} \Gamma(\xi_2, x)\Gamma(\eta_2, y) \int\limits_{|\xi_2-\xi_1|<\delta_1}\ \int\limits_{|\eta_2-\eta_1|<\delta_1} \psi(\xi_1, \eta_1;\lambda)\, d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2.$$

Так как $\Phi(\lambda)$ действует непрерывно из L_1 в M, то $S(x, y;\ \lambda)$ ограничено. Учитывая вид (6) $\Gamma(x, y)$ получаем из (10)

$$\int\limits_{|x-\xi_2|<\delta_2}\ \int\limits_{|\xi_2-\xi_1|<\delta_1}\ \int\limits_{|y-\eta_2|<\delta_2}\ \int\limits_{|\eta_2-\eta_1|<\delta_1} \psi(\xi_1, \eta_1;\ \lambda)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\xi_2\, d\eta_2 = \underset{|x|,|y|\to\infty}{=} O(|x|^{\frac{n}{2}+\varepsilon} |y|^{\frac{n}{2}+\varepsilon}). \tag{11}$$

Соотношение (11) по существу и доказывает теорему. Действительно, оценка (5) для «индивидуальных» собственных функций получается из (11) немедленно: пусть

$$\psi(x, y;\ \lambda) = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \varphi_\alpha(x;\ \lambda)\overline{\varphi_\alpha(y;\ \lambda)}$$

—билинейное разложение спектральной функции; это разложение локально сходится в L_2 по $dx\, dy$, поэтому при подстановке его в (11) можно менять порядок суммирования и интегрирования и мы при $y = x$ получим

$$\sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \left| \int\limits_{|x-\xi_2|<\delta_2}\ \int\limits_{|\xi_2-\xi_1|<\delta_1} \varphi_\alpha(\xi_1;\ \lambda)\, d\xi_1 d\xi_2 \right|^2 \underset{|x|\to\infty}{=} O(|x|^{n+2\varepsilon}).$$

Отсюда следует (5) для $\varphi_\alpha(\xi;\ \lambda)$.

Теорема доказана.

При несколько более жестких ограничениях, чем приведенные в теореме 1, оценку (5) можно усилить, заменив два осреднения одним. Наметим доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1 и дополнительно известно: 1) $E(\Delta)$ для любого ограниченного интервала Δ является интегральным оператором с непрерывным по (x, y) ядром $E_\Delta(x, y)$; 2) имеет место условие а) на стр. 70. Тогда для любых $\varepsilon, \delta > 0$ ϱ-почти все собственные функции оператора A удовлетворяют оценке*

$$\int\limits_{|x-\xi|<\delta} \varphi(\xi;\ \lambda)\, d\xi \underset{|x|\to\infty}{=} O(|x|^{\frac{n}{2}+\varepsilon}). \tag{12}$$

В самом деле, будем дифференцировать операторную меру $\Theta(\Delta) = \Gamma^* E(\Delta)\Gamma$; для этого достаточно доказать локальную ограниченность $\operatorname{Var}\Theta$. При любом ограниченном интервале Δ $E(\Delta) \leq \varepsilon_\Delta \gamma(A)^* \gamma(A)$ $(\varepsilon_\Delta > 0)$; $E(\Delta)$ является интегральным оператором с положительно определенным непрерывным ядром $E_\Delta(x, y)$, а $\gamma(A)^* \gamma(A)$ интегральным оператором с положительно определенным ограниченным константой C ядром $\int\limits_{E_n} \overline{K(\xi, x)} \times K(\xi, y)\, d\xi$. Отсюда следует, что

$$0 \leq E_\Delta(x, x) \leq \varepsilon_\Delta C \qquad (x \in E_n). \tag{13}$$

Будем теперь проводить для $\Theta(\Delta)$ оценки, аналогичные (8), заменяя $P_\Delta(x, y)$ на $E_\Delta(x, y)$ и считая, что интервалы $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ расположены на ограниченном интервале (a, b). Учитывая, что при фиксированном x $E_\Delta(x, x)$ во всяком случае конечно аддитивна по Δ и применяя (13) [при $\Delta = (a, b)$] вместо (7), получаем: $\operatorname*{Var}\limits_{(a,b)} \Theta < \infty$. Дальнейшее доказательство не отличается от доказательства теоремы 1.

Заметим, что условие 1) будет заведомо выполняться, если известно, что ядро оператора $\gamma(A)^* \gamma(A)$ и спектральная функция $\psi(x, y; \lambda)$ непрерывны по (x, y) (последняя — ϱ-почти для всех λ). Такое положение будет, например, в случае эллиптических дифференциальных операторов.

Перейти в (12) или (5) к пределу от осреднений к функциям и тем самым получить оценку (4) не удается. Однако в том случае, когда собственные функции $\varphi(x; \lambda)$ не имеют «высоких пиков», уже оценки типа (12), (5) приводят к (4). Возможно, что такая ситуация и имеет место в случае дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Э. Шноль, О поведении собственных функций, ДАН СССР, т. 94, № 3, 1954, 389—392.

2. А. Г. Костюченко, О поведении собственных функций самосопряженных операторов, ДАН СССР, т. 114, № 2, 1957, 249—251.

3. K. Maurin, Eine Abschätzung für Eigenfunktionen. Der Verschiebung invarianter Operation auf homogenen Räumen, Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. math., astr. et phys., **8**, N 6, 1959, 337—341.

4. В. Маслов, Об асимптотике обобщенных собственных функций уравнения Шредингера, Усп. матем. наук, т. XVI, № 4, 1961, 253—254.

5. Ю. М. Березанский, О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, Укр. матем. журнал, т. XI, № 1, 1959, 16—24.

6. C. Foias, Décompositions intégrales des familles spectrales et semispectrales en opérateurs qui sortent de l'espace hilbertien, Acta, Sci. Math., Szeged, **20**, N 2—3, 1959, 117—155.

7. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным фукциям самосопряженных операторов, Матем. сб., т. 43, N 1, 1957, 75—126.

Поступила 17.X 1961 г.

Киев