О решениях линейных эллиптических систем дифференциальных уравнений с многомерными множествами особенностей

С. П. Гавеля

Использование специального набора разрывных функций позволяет построить весьма простой способ распространения происходящего от И. Фредгольма [1] и развитого Я. Б. Лопатинским [2] метода изучения поведения решений линейных эллиптических систем дифференциальных уравнений вблизи их изолированно-точечных особенностей на случай, когда такие особые точки образуют многомерные множества. При этом посредством аналогичного приведенному в [3] видоизменения фундаментальной матрицы оказывается возможным избежать ограничения (конечного) порядка таких особенностей. Из получающихся в результате представлений рассматриваемых решений в виде интегралов от производных соответствующих фундаментальных матриц по множествам разрыва этих решений следует, в частности, распространение на данный случай известного * предложения об устранимости особенностей достаточно низкого порядка.

Излагаемое непосредственно примыкает к заметке [3]. Ввиду этого здесь будут сохранены обозначения и предположения последней, за исключением особо оговариваемых случаев. Такое соглашение позволит, очевидно, избежать подробных повторений ранее приводившихся рассуждений и объяснений, заменив их соответствующими ссылками.

1. Посредством $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ условимся обозначать заданный в некоторой области D действительного n-мерного аргумента $x = (x_1, \ldots, x_n)$ матричный размера $p \times p$ линейный эллиптический дифференциальный оператор порядка s с гладкими коэффициентами, обладающий в замыкании $\overline{\Omega}$ некоторой подобласти Ω области D нормальной фундаментальной матрицей $\omega(x, \xi)$ с описанными в [3] свойствами а) — в) [(1) — (3)]. Кроме того, будем предполагать, что г) для всякой s-кратно непрерывно дифференцируемой по x при $x \neq \xi$ функции $\psi(x, \xi)$**, удовлетворяющей условиям

$$\frac{\partial^{||k||}}{\partial x^k} \psi(x, \xi) \in K_{n-s+t+||k||-0} \qquad (||k|| < s)$$

и

$$A\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x, \xi) = 0 \qquad (\text{при } x, \xi \in \Omega, \qquad x \neq \xi)$$

имеет место представление

$$\psi(x, \xi) = \sum_{\substack{||k||=0, \\ 0 \leqslant k_n < s}}^{t-1} \frac{\partial^{||k||}}{\partial \xi^k} \omega(x, \xi) \tau_k^{(\psi)}(\xi) + \psi_0(x, \xi), \tag{1}$$

где $\psi_0(x, \xi)$ — t раз $(t \geqslant s)$ непрерывно дифференцируемое по x решение уравнения

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0 \tag{2}$$

(здесь и в дальнейшем употребляются сокращения: $k_1 + \ldots + k_n = ||k||$;

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{||k||}}{\partial x^k}, \qquad k = (k_1, \ldots, k_n).$$

Посредством σ будет обозначаться, далее, множество особых точек некоторого решения $\Psi(x, \sigma)$ уравнения (2) в $\Omega \backslash \sigma$. При этом множество σ будет предполагаться расположенным на некоторой такой m-мерной $(m < n)$ поверхности Σ $(\sigma \subset \Sigma)$, которая могла бы быть выбрана в качестве координатной без нарушения требуемых свойств системы (2). Ввиду этого предположения в дальнейшем для всякой точки $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Sigma$ будем считать $z_{m+1} = \ldots = z_n = 0$.

Обозначив теперь с помощью x' проекцию точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ на

---

* Для одного уравнения см., например, [4], стр. 55—58, 137—138, [5], стр. 104—105; для системы — [2], стр. 730.

** Согласно [2] функция $\psi(x, \xi)$ принадлежит классу K_m, если при $x, \xi \in \overline{\Omega}$, $x \neq \xi$, $\psi(x, \xi)$ непрерывна и $|x - \xi|^m \psi(x, \xi)$ (при $m > 0$), или $\psi(x, \xi)/\ln|x - \xi|$ (при $m = 0$), или $\psi(x, \xi)$ (при $m < 0$) ограничена.

(координатную) поверхность Σ, то есть точку с координатами $x_1, \ldots, x_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m}$, условимся называть функцию $\Phi(x, \sigma)$ принадлежащей классу $K_\mu^{(m)}$ в Ω, если при $x \in \Omega$, $x \neq x'$, $\Phi(x, \sigma)$ непрерывна и $|x - x'|^\mu \Phi(x, \sigma)$ (при $\mu > 0$), или $\Phi(x, \sigma)/\ln|x - x'|$ (при $\mu = 0$), или $\Phi(x, \sigma)$ (при $\mu < 0$) равномерно ограничена. В этих обозначениях будет предполагаться, что

$$\frac{\partial^{||k||}}{\partial x^k} \Psi(x, \sigma) \in K^{(m)}_{n-m+t-s+||k||-\alpha} \qquad (0 \leqslant ||k|| < s, \qquad 0 < \alpha < 1). \tag{3}$$

2. Непосредственным вычислением при любом целом $q > 0$ может быть получено представление

$$\frac{1}{|x - x'|^q} = \lambda_{m,q} \int \overset{m}{\overbrace{\underset{\Sigma}{\cdots}}} \int \frac{d_z \Sigma}{|x - z|^{q+m}}, \tag{4}$$

где

$$\lambda_{m,q} = \begin{cases} \dfrac{(m+q-2)!!}{2^{\frac{m}{2}} \pi^{\frac{m}{2}} (q-2)!!} & \text{при } \begin{cases} m \text{ четном,} \\ q \text{ любом;} \end{cases} \\ \dfrac{(m+q-2)!!}{2^{\frac{m+1}{2}} \pi^{\frac{m-1}{2}} (q-2)!!} & \text{при } \begin{cases} m \text{ нечетном,} \\ q \text{ четном;} \end{cases} \\ \dfrac{(m+q-2)!!}{2^{\frac{m-1}{2}} \pi^{\frac{m+1}{2}} (q-2)!!} & \text{при } \begin{cases} m \text{ нечетном,} \\ q \text{ нечетном} \end{cases} \end{cases}$$

($k!!$ обозначает $k(k-2)\ldots 2$, если k четное, или $k(k-2)\ldots 1$ — в противном случае).

Это позволяет, прежде всего, записать

$$\Psi(x, \sigma) = \int \overset{m}{\overbrace{\underset{\Sigma}{\cdots}}} \int v(x, z)\, d_z \Sigma, \tag{5}$$

где

$$v(x, z) = \lambda_{m,q} \frac{|x - x'|^q}{|x - z|^{q+m}} \Psi(x, \sigma)$$

Функцию

$$\varphi(x, z) = A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x, z) \tag{6}$$

можно, очевидно, представить

$$\varphi(x, z) = \sum_{||k||=0}^{s} A_k(x) \frac{\partial^{||k||}}{\partial x^k} v(x, z),$$

где в силу сделанного в самом начале предположения $A_k(x)$ — матрицы гладких в D функций. При этом поскольку $A\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \Psi(x, \sigma) = 0$ в $\Omega \setminus \sigma$, то следовательно, $\varphi(x, z)$ содержит производные от $\Psi(x, \sigma)$ лишь до порядка $s - 1$ включительно. Таким образом, уславливаясь обозначать посредством C или $Q(x/\Omega^*)$ с различными индексами постоянные или дифференцируемые и равномерно ограниченные в $\Omega \setminus \Omega^*$ функции соответственно, имеем

$$\frac{\partial^{||k||}}{\partial x^k} v(x, z) = \sum_{\substack{||k'+k''+k'''||=||k|| \\ 0 \leqslant ||k'''|| \leqslant s-1}} C_{k'k''k'''} \frac{\partial^{||k'||}}{\partial x^{k'}} |x - x'|^q \frac{\partial^{||k''||}}{\partial x^{k''}} \frac{1}{|x - z|^{q+m}} \frac{\partial^{||k'''||}}{\partial x^{k'''}} \Psi(x, \sigma)$$

и далее

$$\frac{\partial^{||k'||}}{\partial x^{k'}} | x - x' |^q = \begin{cases} Q_{k'} (x/\Sigma) \, | x - x' |^{q - ||k'||} & \text{при} \quad k_1'^2 + \ldots + k_m'^2 = 0, \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^{||k''||}}{\partial x^{k''}} \frac{1}{| x - z |^{q+m}} = Q_{k''} (x/z) \, | x - z |^{-q-m-||k''||},$$

$$\frac{\partial^{||k'''||}}{\partial x^{k'''}} \Psi (x, \sigma) = Q_{k'''} (x/\Sigma) \, | x - x' |^{s-n-t+m-||k'''||+\varepsilon}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^{||k||}}{\partial x^k} v (x, z) = \sum_{\substack{||k'+k''+k'''|| = ||k|| \\ 0 \leqslant ||k''|| \leqslant s-1}} \frac{Q_k (x/\Sigma) \, | x - x' |^{q-||k'||}}{| x - z |^{q+m+||k''||} \, | x - x' |^{n-s+t+||k'''||-m-\varepsilon}}.$$

Выбирая

$$q \geqslant \max \{s - 1; \qquad n - m + t + 1\}, \tag{7}$$

получаем

$$\frac{\partial^{||k||}}{\partial x^k} v (x, z) =$$

$$= \frac{| x - x' |^\gamma}{| x - z |^\gamma} \sum_{\substack{||k'+k''+k'''|| = ||k|| \\ 0 \leqslant ||k''|| \leqslant s-1}} \frac{Q_k (x/\Sigma) \, | x - x' |^{q-||k||-\gamma}}{| x - x' |^{n-s+t-m+||k'''||-\varepsilon} \, | x - z |^{g-\gamma} \, | x - z |^{q+m+||k''||-g}},$$

где

$$g = q - || k' || + m - n + s - t - || k''' || + \varepsilon \ [> 0 \text{ ввиду (7)}]$$

и $0 < \gamma < \varepsilon$.

Поскольку, далее,

$$\frac{| x - x' |^{q-||k'||-\gamma}}{| x - x' |^{n-s+t-m+||k'''||-\varepsilon} \, | x - z |^{g-\gamma}} = Q_{k', k'''} (x/\Sigma)$$

и $q - m + || k'' || - g = n - s + t + || k || - \varepsilon$, то следовательно,

$$\frac{\partial^{||k||}}{\partial x^k} v (x, z) = \frac{| x - x' |^\gamma}{| x - z |^\gamma} \frac{Q_k^* (x/\Sigma)}{| x - z |^{n-s+t+||k||-\varepsilon}}, \tag{8}$$

или

$$\varphi (x, z) \, | x - z |^{n+t-\alpha} = | x - x' |^\gamma \, Q (x/\Sigma), \tag{9}$$

где $\alpha = \varepsilon - \gamma > 0$.

Из этого следует выполнение условия Гельдера

$$| \varphi (x, z) \, | x - z |^{n+t-\alpha} - \varphi (x^*, z) \, | x^* - z |^{n+t-\alpha} | \leqslant C \, | x - x^* |^\gamma. \tag{10}$$

3. Предложенный в [3] прием видоизменения фундаментальной матрицы может быть распространен на случай многомерных множеств разрыва свободного члена рассматриваемой неоднородной системы

$$A \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) u (x) = \Phi (x, \zeta). \tag{11}$$

Пусть ζ — множество особенностей функции $\Phi (x, \zeta)$, расположенное на l-мерной ($l < n$) координатной плоскости Z, определяемой системой уравнений $x_{l+1} = \ldots = x_n = 0$. Выбирая в качестве μ удовлетворяющее условию

$l \leqslant \mu \leqslant n-1$ целое число, определяем

$$\omega^*(x, \xi) = \omega(x, \xi) - \omega^\mu(x, \xi);$$

$$\omega^\mu(x, \xi) = \omega(x; \xi^*, \vartheta, r)\Big|_{r=0} + \frac{\partial \omega(x; \xi^*; \vartheta, r}{\partial r}\Big|_{r=0} \varrho +$$

$$+ \ldots + \frac{\partial^{t-1} \omega(x; \xi^*, \vartheta, r)}{\partial r^{t-1}}\Big|_{r=0} \frac{\varrho^{t-1}}{(t-1)!},$$

где $\omega(x; \xi^*, \vartheta, \varrho)$ обозначает переход в функции $\omega(x, \xi)$ к цилиндрическим координатам точки ξ:

$$\xi_i = \begin{cases} \xi_i & \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, \mu, \\ \varrho \cos\vartheta_{\mu+1} \ldots \cos\vartheta_{i-1} \sin\vartheta_i & \text{при} \quad i = \mu+1, \ldots, n-1; \end{cases}$$

$$\xi_n = \varrho \cos\vartheta_{\mu+1} \ldots \cos\vartheta_{n-2} \cos\vartheta_{n-1},$$

$\xi^* = (\xi_1, \ldots, \xi_\mu, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-\mu})$ — проекция точки ξ на плоскость $x_{\mu+1} = \ldots = x_n = 0$.

В этих обозначениях непосредственным повторением соответствующих рассуждений из [3] $\left(\text{с заменой, однако, области } \Omega_2 \text{ содержащейся в } \Omega \text{ частью цилиндра } \varrho \leqslant \frac{|x|}{3}\right)$ обосновывается

Теорема 1. *В предположениях а) — г)* и при условии [предположение д)] равномерной ограниченности в Ω величин* $\left|\frac{\partial}{\partial x_j} \int \overset{n}{\underset{\Omega}{\cdots}} \int \frac{\partial^{\|k\|}}{\partial x^k} \omega(x, \xi)\, d_\xi \Omega\right|$ *при всех $0 \leqslant \|k\| < s$, $j = 1, 2, \ldots, n$, а также при выполнении условия*

$$\Phi(x, \zeta)\, |x - x''|^{n+t-\alpha} - \Phi(\widetilde{x}, \zeta)\, |\widetilde{x} - \widetilde{x}''|\,|^{n+t-\alpha}\,| \leqslant C_* |x - \widetilde{x}|^\nu,$$

где $x'' = (x_1, \ldots, x_l, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-l})$ — проекция точки x на плоскость Z, интеграл

$$w(x) = \int \overset{n}{\underset{\Omega}{\cdots}} \int \omega^*(x, \xi)\, \Phi(\xi, \zeta)\, d_\xi \Omega$$

допускает s-кратное дифференцирование по параметру x, удовлетворяет системе (11) (*в области непрерывности*) *и обладает оценкой*

$$\frac{\partial^{\|k\|}}{\partial x^k} w(x) \in K^{(l)}_{n+t-s+\|k\|-\beta}$$

при всех $0 \leqslant \|k\| \leqslant s$ и любом $0 < \beta < \alpha$.

Заметим попутно, что эта теорема позволяет распространить и другие результаты заметки [3] на случай многомерных множеств разрыва правой части системы (11).

4. Используя теперь в качестве $\Phi(x, \zeta)$ определенную формулой (6) функцию $\varphi(x, z)$ (в этом случае, очевидно, будет $l = 0$), но выбирая для дальнейшего $\mu \geqslant m$, полагаем

$$v^*(x, z) = -\int \overset{m}{\underset{\Omega}{\cdots}} \int \omega^*(x, \xi)\, \varphi(\xi, z)\, d_\xi \Omega.$$

* Формулировку предположений а), б) и в) см. в [3] [(1)—(3)].

При этом согласно только что сформулированной теореме 1 [применимой ввиду (10)] имеем

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v^*(x, z) = -\varphi(x, z) = -A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x, z),$$

а также

$$\frac{\partial^{\|k\|}}{\partial x^k} v^*(x, z) \in K_{n+t-s+\|k\|-\beta}.$$

Поскольку, кроме того, ввиду (8)

$$\frac{\partial^{\|k\|}}{\partial x^k} v(x, z) \in K_{n+t-s+\|k\|-\varepsilon},$$

то следовательно, для функции

$$\psi(x, z) = v(x, z) + v^*(x, z)$$

согласно предположению г) имеет место разложение (1).

Обозначая, далее, посредством σ^* некоторую окрестность на поверхности Σ пересечения множества σ с замыканием Ω и внося разложение (1) в представление (5), получаем

$$\Psi(x, \sigma) = \int \overset{m}{\underset{\Sigma}{\cdots}} \int v(x, z)\, d_z \Sigma =$$

$$= \sum_{\substack{\|k\|=0 \\ 0<k_n<s}}^{t-1} \int \overset{m}{\underset{\sigma^*}{\cdots}} \int \frac{\partial^{\|k\|}}{\partial z^k} \omega(x, z)\, \tau_k^{(\psi)}(z)\, d_z \sigma + \Psi_0(x, \sigma) + I,$$

где

$$\Psi_0(x, \sigma) = \int \overset{m}{\underset{\sigma^*}{\cdots}} \int \psi_0(x, z)\, d_z \Sigma + \int \overset{m}{\underset{\Sigma \setminus \sigma^*}{\cdots}} \int \psi(x, z)\, d_z \Sigma$$

— по крайней мере s-кратно непрерывно дифференцируемое в Ω решение системы (2) и

$$I = -\int \overset{m}{\underset{\Sigma}{\cdots}} \int v^*(x, z)\, d_z \Sigma = \int \overset{m}{\underset{\Sigma}{\cdots}} \int \int \overset{n}{\underset{\Omega}{\cdots}} \int \omega^*(x, \xi)\, \varphi(\xi, z)\, d_\xi \Omega\, d_z \Sigma.$$

Заметим, теперь, что (ввиду условия $\mu \geqslant m$)

$$\int \overset{m}{\underset{\Sigma}{\cdots}} \int \omega^*(x, \xi)\, \varphi(\xi, z)\, d_z \Sigma = \omega^*(x, \xi) \int \overset{m}{\underset{\Sigma}{\cdots}} \int \varphi(\xi, z)\, d_z \Sigma$$

Но функция

$$\Psi(\xi, \sigma) = \int \overset{m}{\underset{\Sigma}{\cdots}} \int v(\xi, z)\, d_z \Sigma = \lambda_{m,q} \int \overset{m}{\underset{\Sigma}{\cdots}} \int \Psi(\xi, \sigma) \frac{|\xi - \xi'|^q}{|\xi - z|^{q+m}}\, d_z \Sigma$$

непрерывна при $\xi \in \Omega \setminus \Sigma$, а ввиду условия (9) при $t - \alpha > 0$ интеграл

$$\int \overset{m}{\underset{\Sigma}{\cdots}} \int A\left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v(\xi, z)\, d_z \Sigma = \int \overset{m}{\underset{\Sigma}{\cdots}} \int \varphi(\xi, z)\, d_z \Sigma$$

сходится равномерно (в некоторой окрестности точки $\xi \in \Omega \setminus \Sigma$). Следовательно, интеграл $\Psi(\xi, \sigma)$ допускает применение оператора $A\left(\xi, \frac{\partial}{\partial\xi}\right)$ по параметру ξ. Таким образом,

$$0 \equiv A\left(\xi, \frac{\partial}{\partial\xi}\right) \Psi(\xi, \sigma) =$$

$$= \int \overbrace{\underset{\Sigma}{\cdots}}^{m} \int A\left(\xi, \frac{\partial}{\partial\xi}\right) v(\xi, z)\, d_z \Sigma = \int \overbrace{\underset{\Sigma}{\cdots}}^{m} \int \varphi(\xi, z)\, d_z \Sigma,$$

причем сходимость последнего интеграла равномерная.

Поскольку, кроме того, интеграл

$$\int \overbrace{\underset{\Omega}{\cdots}}^{n} \int \omega^*(x, \xi)\, \varphi(\xi, z)\, d_\xi \Omega$$

сходится равномерно при всех $z \in \Sigma$, $x \in \Omega \setminus z$, то следовательно

$$I = \int \overbrace{\underset{\Sigma}{\cdots}}^{m} \int \int \overbrace{\underset{\Omega}{\cdots}}^{n} \int \omega^*(x, \xi)\, \varphi(\xi, z)\, d_\xi \Omega d_z \Sigma =$$

$$= \int \overbrace{\underset{\Omega}{\cdots}}^{n} \int \omega^*(x, \xi) \int \overbrace{\underset{\Sigma}{\cdots}}^{m} \int \varphi(\xi, z)\, d_z \Sigma d_\xi \Omega \equiv 0.$$

Этим доказана

Теорема 2. *В предположениях а) — д) для любого s-кратно гладкого в $\Omega \setminus \sigma$ и обладающего оценкой (3) решения $\Psi(x, \sigma)$ уравнения*

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi(x, \sigma) = 0 \qquad (\text{при } x \in \Omega \setminus \sigma)$$

имеет место представление

$$\Psi(x, \sigma) = \sum_{\substack{\|k\|=0 \\ 0<k_n<s}} \int \overbrace{\underset{\sigma^*}{\cdots}}^{m} \int \frac{\partial^{\|k\|}}{\partial z^k} \omega(x, z)\, \tau_k^{(\psi)}(z)\, d_z \sigma + \Psi_0(x, \sigma). \qquad (12)$$

Из этой теоремы, очевидно, непосредственно следуют замечания.

Замечание 1. В случае достаточной гладкости коэффициентов $\tau_k^{(\psi)}(z)$ в интегральной части разложения (12) дифференцирование по переменным $z_1, \ldots, z_m$, может быть устранено (посредством интегрирования по частям, с соответствующим добавлением интегралов меньшей размерности).

Замечание 2. Всякое решение $\Psi(x, \sigma)$ системы (2), удовлетворяющее условию (3) при некотором $t < 1$, по крайней мере s-кратно гладко в Ω (особенности устраняются).

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Fredholm, Acta mathematica, 23, 1900.

2. Я. Б. Лопатинский, Поведение решений линейной эллиптической системы в окрестности изолированной особой точки. ДАН СССР, т. 79, № 5, 1951.

3. С. П. Гавеля, О решениях линейной эллиптической системы дифференциальных уравнений с разрывным свободным членом, УМЖ, т. XII, № 3, 1960.

4. Ф. Йон, Плоские волны и сферические средние, ИИЛ, М., 1958.

5. К. Миранда, Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИИЛ, М., 1957.

Поступила 20.V 1960 г.
Львов