О приближении аналитических функций полиномами в конечном числе областей

П. Я. Киселев

Пусть задана односвязная область D, ограниченная спрямляемой замкнутой жордановой кривой, и пусть $f(z)$ — функция, аналитическая во внутренних точках D и непрерывна в $\overline{D}$. Обозначим через $\varrho_n(f, \overline{D})$ наилучшее приближение функции $f(z)$ в $\overline{D}$ полиномами n-й степени.

Если функция $f(z)$, аналитическая в D, имеет в $\overline{D}$ непрерывную k-ю производную $f^{(k)}(z)$, удовлетворяющую условию Липшица порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$, то для случая, когда граница области D является аналитической кривой, известна следующая оценка [1]

$$\varrho_n(f, \overline{D}) < \frac{A}{n^{k+\alpha}},$$

где A — не зависящая от n и z постоянная. В этой работе доказано также, что если множество E состоит из ν взаимно внешних областей D_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, каждая из которых ограничивается аналитической замкнутой жордановой кривой C_i и если функция $f(z)$ является аналитической в E и на $\overline{E}$ имеет непрерывную k-ю производную $f^{(k)}(z)$, удовлетворяющую условию Липшица порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$, то существуют такие полиномы $p_n(z)$, что

$$|f(z) - p_n(z)| < \frac{A_1}{n^{k+\alpha}}, \qquad z \in \overline{E},$$

где A_1 — не зависящая от n и z постоянная.

Альпер рассмотрел область D, удовлетворяющую условию j [2], а именно: граница C области D представляет замкнутую гладкую кривую Жордана, у которой угол наклона касательной к вещественной оси $\theta(s)$ как функция длины дуги s имеет на C модуль непрерывности $j(h)$ удовлетворяющий условию

$$\int_0^c \frac{j(h)}{h} |\ln h| \, dh < \infty.$$

Альпер доказал, что если область D удовлетворяет условию j и функция $f(z)$, аналитическая в D, удовлетворяет в $\overline{D}$ условию Липшица порядка $\alpha, 0 < \alpha \leqslant 1$, то справедливо соотношение

$$|f(z) - \Phi_n(z)| < \frac{M_1}{n^\alpha}, \qquad z \in \overline{D},$$

где M_1 — не зависящая от n и z постоянная, а $\Phi_n(z)$ — среднее арифметическое частных сумм ряда по полиномам Фабера для области D.

В настоящей заметке эта теорема обобщается на случай ν взаимно внешних областей типа j. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть множество E состоит из ν взаимно внешних областей D_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, каждая из которых удовлетворяет условию j. Пусть $f(z) \equiv f_i(z)$, $z \in \overline{D_i}$, где каждая $f_i(z)$ является аналитической в D_i, непрерывной в $\overline{D_i}$ и в $\overline{D_i}$ удовлетворяет условию Липшица порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда существуют такие полиномы $P_n(z)$, что*

$$|f(z) - P_n(z)| < \frac{B}{n^\alpha}, \qquad z \in \overline{E},$$

где B — не зависящая от z и n постоянная.

Доказательство. Согласно теореме Альпера, для каждой функции $f_i(z)$, $z \in \overline{D_i}$, существуют такие полиномы $\Phi_m^{(i)}(z)$ степени m, что

$$|f(z) - \Phi_m^{(i)}(z)| < \frac{B_1}{m^\alpha}, \qquad z \in \overline{D}_i. \tag{1}$$

Пусть теперь $\varphi_i(z)$ отображает внешность D_i на внешность единичного круга $|w| > 1$. Возьмем линию уровня $C_R^{(i)} : |\varphi_i(z)| = R > 1$. Полиномы $\Phi_m^{(i)}(z)$ представляют функции, аналитические в $C_R^{(i)}$. Вследствие (1), эти полиномы равномерно ограничены для $z \in \overline{D}_i$, т. е.

$$|\Phi_m^{(i)}(z)| < B_2, \qquad z \in \overline{D}_i.$$

Согласно лемме Бернштейна,

$$|\Phi_m^{(i)}(z)| < B_2 R^m, \qquad z \in C_R^{(i)}, \qquad |w| = R > 1.$$

Определим теперь функцию

$$\Phi_m(z) = \Phi_m^{(i)}(z), \qquad z \in \overline{C}_R^{(i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Известно [3], что конечное число взаимно внешних жордановых кривых можно с любой наперед заданной точностью приблизить лемнискатами. Пусть

$$|\omega(z)| = |(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_\lambda)| = \mu$$

является лемнискатой, которая извне аппроксимирует границу множества E. Возьмем такое μ, чтобы лемниската γ: $|\omega(z)| = \mu$ состояла из ν взаимно внешних кривых γ_i и чтобы каждая γ_i находилась соответственно внутри

$C_R^{(i)}$. Тогда функция $\Phi_m(z)$ является аналитической в области, ограниченной лемнискатой γ и

$$|\Phi_m(z)| < B_3 R^m, \qquad z \in \overline{\gamma}.$$

Построим полином $P_{n\lambda}$ степени $n\lambda$, который интерполирует функцию $\Phi_m(z)$ по узлам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda$, каждый узел α_i будем считать кратности $n+1$. Тогда

$$\Phi_m(z) - P_{n\lambda}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\Phi_m(t)}{t-z} \cdot \frac{[\omega(z)]^{n+1}}{[\omega(t)]^{n+1}}\, dt,$$

где $|\omega(t)| = \mu$, $|\omega(z)| = \mu_1$, $\mu_1 < \mu$.
Отсюда

$$|\Phi_m(z) - P_{n\lambda}(z)| < B_4 R^m \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^{n+1} < B_5 R^m \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^n.$$

Возьмем теперь такое p, чтобы

$$R\left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^p < \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}},$$

где p — целое положительное число. Тогда в силу того, что $3^{\frac{1}{3}} \geqslant m^{\frac{1}{m}}$ при любом m, будем иметь

$$R\left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^p < \frac{1}{m^{\frac{1}{m}}}.$$

Положим $n = mp$, $q = \lambda p$ тогда

$$|\Phi_m(z) - P_{qm}(z)| < B_5 \left[R\left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^p\right]^m < \frac{B_5}{m}. \tag{2}$$

Комбинируя (1) и (2), получаем

$$|f(z) - P_{qm}(z)| < \frac{B_6}{m^\alpha}.$$

Определяя теперь искомые полиномы $P_n(z)$ точно так же, как это сделано у Севелла [1] для случая ν взаимно внешних аналитических кривых, а именно, полагая

$$P_n(z) \equiv 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, q-1),$$

$$P_{qm+h}(z) = P_{qm}(z) \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, q-1; \quad m = 1, 2, \ldots)$$

и учитывая, что для достаточно больших m существуют постоянные B_7 и B_8 такие, что

$$\frac{B_7}{m^\alpha} < \frac{B_8}{(qm+h)^\alpha},$$

мы получаем доказательство теоремы.

Альпер [2] показал также, что если $f^{(k)}(z)$ удовлетворяет в $\overline{D}$, где $\overline{D}$ — область типа j, условию Липшица порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$, то справедлива оценка для наилучшего приближения

$$\varrho_n(f, \overline{D}) < \frac{B_9}{n^{k+\alpha}}.$$

Изложенным выше приемом можно показать, что эта оценка справедлива и на множестве $\bar{E}$, состоящем из ν взаимно внешних замкнутых областей типа j.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. W. Sewell, Degree of approximation by polynomials in the complex domain. Princ. Univ. Press, 1942.
2. С. Я. Альпер, О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области, Изв. АН СССР, т. 19, № 6, 1955.
3. J. L. Walsh, Interpolation and approximation by rational function in the complex domain, New York, 1935.

Поступила 30.XII 1961 г.
Киев