К вопросу об асимптотическом решении одного линейного операторного дифференциального уравнения

И. И. Ковтун

1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon F(t)\, x. \tag{1}$$

Здесь x — вектор, ε — малый параметр, A — простой диссипативный оператор, для которого $\operatorname{sp}\frac{A-A^*}{2i} = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}\mu_k$, где μ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — последовательность невещественных точек спектра оператора A с предельными точками на вещественной оси. Тогда [4], [3] $U^{-1}AU = A_1$, где U — некоторый унитарный оператор, а оператор A_1 определен равенством

$$(A_1 f)_k = f_k\mu_k + i \prod_{s=k+1}^{\infty} f_s \Pi_s \Pi_k^* = fB \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

Π_k — последовательность однострочных матриц, удовлетворяющих условию $\Pi_k\Pi_k^* = 2\operatorname{Im}\mu_k$. Матрица B имеет вид [6]

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ i\Pi_2\Pi_1^* & \mu_2 & \\ i\Pi_3\Pi_1^* & i\Pi_3\Pi_2^* & \mu_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{pmatrix}.$$

Нижняя треугольная матрица B матрицей V приводится к диагональному виду [6]

$$V^{-1}BV = D.$$

Оператор $F(t)$ зависит от параметра t и представим в виде

$$F(t) = \sum_{p} A_{\nu_p} e^{i\nu_p t}, \tag{2}$$

где A_{ν_p} — некоторые операторы, не зависящие от параметра t и удовлетворяющие такому условию, при котором ряд (2) сходится при $p \to \infty$. Операторы такого типа будем называть операторами класса Σ

Из $\operatorname{Im} \mu_k$ составим диагональную матрицу R.

Теорема 1. *Формальное решение уравнения* (1) *имеет вид* [1], [5]

$$x = [UVe^{iRt} + Y(t)]\,\zeta, \tag{3}$$

где ζ — *формально определяется из уравнения*

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathfrak{A}\zeta. \tag{4}$$

Относительно неизвестных операторов $\mathfrak{A}$ *и* $Y(t)$ *принимаем, что они допускают представления в виде*

$$\mathfrak{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathfrak{A}_k, \qquad Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n Y_n(t), \tag{5}$$

причем $Y_n(t)$ — *операторы класса* Σ.

Доказательство. Подставляя (3) в (1) и учитывая (4), получаем

$$UVe^{iRt}iR + Y'(t) + [UVe^{iRt} + Y(t)]\,\mathfrak{A} \equiv$$

$$\equiv [A + \varepsilon F(t)]\,[UVe^{iRt} + Y(t)]. \tag{6}$$

Приравняем коэффициенты при различных степенях ε, учитывая вид операторов $\mathfrak{A}$ и $Y(t)$.

Из равенства коэффициентов при ε° имеем

$$\mathfrak{A}_0 = D - iR. \tag{7}$$

Приравняем коэффициенты при ε^1. Полагая

$$Y_1(t) = UVe^{iRt}Z_1(t)$$

и учитывая (7), получаем

$$Z_1'(t) - \mathfrak{A}_0 Z_1(t) + Z_1(t)\,\mathfrak{A}_0 = e^{-iRt}\,V^{-1}U^{-1}F(t)\,UVe^{iRt} - \mathfrak{A}_1. \tag{8}$$

Оператор $e^{-iRt}V^{-1}U^{-1}F(t)\,UVe^{iRt}$ принадлежит классу Σ, следовательно, представим в виде $\sum\limits_p A^{(1)}_{\nu_p} e^{i\nu_p t}$. Искомый оператор $\mathfrak{A}_1$ выберем равным оператору $A^{(1)}_{\nu_0}$. Решение уравнения (8) будем искать в виде

$$Z_1(t) = \sum_{p \neq 0} B^{(1)}_{\nu_p} e^{i\nu_p t}, \tag{9}$$

где $B^{(1)}_{\nu_p}$ — операторы, не зависящие от t и такие, что ряд (9) сходится. Тогда из (8) получим

$$i\nu_p B^{(1)}_{\nu_p} - \mathfrak{A}_0 B^{(1)}_{\nu_p} + B^{(1)}_{\nu_p}\mathfrak{A}_0 = A^{(1)}_{\nu_p} \qquad (p = 1, 2 \ldots). \tag{10}$$

Полученное операторное уравнение является уравнением типа

$$\sum_{i,\,k=0}^{n} \alpha_{ik} S^i X T^k = F \tag{11}$$

($i, k = 0, 1,\quad \alpha_{00} = \alpha_{11} = 0,\quad \alpha_{01} = \alpha_{10} = 1,\quad X = B^{(1)}_{\nu_p},\ T = \mathfrak{A}_0,\ F = A^{(1)}_{\nu_p},\ S = i\nu_p E - \mathfrak{A}_0,\ p = 1, 2, \ldots$). Для таких уравнений существует единственное решение при любых ограниченных операторах S, T, F и при условии

$\sum\limits_{i,k=0}^{n} \alpha_{ik}\lambda^i\mu^k \neq 0$, когда $\lambda \in \Pi_s$, $\mu \in \Pi_T$, где Π_s и Π_T — спектры операторов S и T [2].

Так как для уравнения (10) эти условия выполнены, то решение этого уравнения можно представить в виде

$$B_{\nu_p}^{(1)} = -\frac{1}{4\pi^2}\oint\limits_{\Gamma_1}\oint\limits_{\Gamma_2}\frac{(i\nu_pE - \mathfrak{A}_0 - \lambda E)^{-1}A_{\nu_p}^{(1)}(\mathfrak{A}_0 - \mu E)^{-1}}{\lambda+\mu}\,d\lambda d\mu, \qquad (12)$$

(Γ_1 и Γ_2 — кривые, окружающие спектры операторов $i\nu_pE - \mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_0$).

Приравняем коэффициенты при ε^n. Если положить

$$Y_n(t) = UVe^{iRt}Z_n(t)$$

и учесть (7), то получим

$$Z_n'(t) - \mathfrak{A}_0 Z_n(t) + Z_n(t)\mathfrak{A}_0 = e^{-iRt}V^{-1}U^{-1}F(t)UVe^{iRt}Z_{n-1}(t) - \\ - Z_{n-1}(t)\mathfrak{A}_1 - Z_{n-2}(t)\mathfrak{A}_2 - \ldots - Z_1(t)\mathfrak{A}_{n-1} - \mathfrak{A}_n. \qquad (13)$$

$e^{-iRt}V^{-1}U^{-1}F(t)UVe^{iRt}Z_{n-1}(t) - Z_{n-1}(t)\mathfrak{A}_1 - \ldots - Z_1(t)\mathfrak{A}_{n-1} - \mathfrak{A}_n$ — известный оператор из класса Σ, следовательно, имеет вид $\sum\limits_p A_{\nu_p}^{(n)}e^{i\nu_pt}$. Выберем оператор $\mathfrak{A}_n$ равным $A_{\nu_0}^{(n)}$. Принимая решение уравнения (13) в виде

$$Z_n(t) = \sum_{p\neq 0} B_{\nu_p}^{(n)}e^{i\nu_pt}, \qquad (14)$$

где $B_{\nu_p}^{(n)}$ — операторы, не зависящие от t и такие, что ряд (14) сходится, придем к уравнению

$$i\nu_pB_{\nu_p}^{(n)} - \mathfrak{A}_0B_{\nu_p}^{(n)} + B_{\nu_p}^{(n)}\mathfrak{A}_0 = A_{\nu_p}^{(n)} \qquad (p \neq 0),$$

которое будет типа (11) и поэтому имеет решение.

Аналогично определяются $\mathfrak{A}_k$ и $Y_k(t)$ $(k = n+1, \ldots)$, если уже определены $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ и $Y_1(t), \ldots, Y_n(t)$.

Таким образом, дан процесс определения операторов $\mathfrak{A}_k$ и $Y_n(t)$, и тем самым теорема 1 доказана.

2. Пусть в уравнении (1) A — ограниченный нормальный оператор. Как известно, этот оператор представим в виде

$$A = A_1 + iA_2,$$

где A_1 и A_2 — перестановочные симметрические операторы. Предполагаем, далее, что оператор A_2 вполне непрерывный с различными собственными значениями, причем нуль не принадлежит спектру оператора A_2.

Теорема 2. *Формальное решение уравнения* (1) *имеет вид*

$$x = [e^{iA_2t} + Y(t)]\,\zeta,$$

где ζ является формальным решением уравнения (4); *неизвестные операторы* $\mathfrak{A}$ и $Y(t)$ *допускают представления* (5).

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1. Из равенства коэффициентов при ε°, учитывая перестановочность оператора A с A_2, а следовательно, и с e^{iA_2t}, имеем

$$\mathfrak{A}_0 = A_1.$$

Приравнивая коэффициенты при ε^k $(k = 1, 2, \ldots)$, можно выбрать $\mathfrak{A}_k = C_{\nu_0}^{(k)}$, где $C_{\nu_0}^{(k)}$ — известный оператор. $Y_k(t)$ ищем в виде

$$Y_k(t) = e^{iA_2 t} Z_k(t),$$

где

$$Z_k(t) = \sum_{p \neq 0} D_{\nu_p}^{(k)} e^{i\nu_p t},$$

что приводит к операторному уравнению типа (11), которое разрешимо.

3. Дадим асимптотическую оценку погрешности m-го приближения для конечных t.

Следуя методу Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, введем понятие укороченного преобразования. Назовем точным решением уравнения (1) в «укороченном» виде выражение

$$x = \left[UVe^{iRt} + \sum_{n=1}^{m} \varepsilon^n Y_n(t) \right]. \tag{15}$$

В нем неизвестные удовлетворяют не уравнениям m-го приближения, а отличающимся от них на величины $m+1$-го порядка малости. Докажем лемму.

Лемма. *Система уравнений* (1) *заменой переменных* (15) *сводится к системе*

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left[\sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \mathfrak{A}_k + \varepsilon^{m+1} R_m(t, \varepsilon) \right] \zeta, \tag{16}$$

где $R_m(t, \varepsilon)$ *— оператор класса* Σ.

Доказательство. Подставляя (16) в (1), имеем

$$\left[UVe^{iRt} + \sum_{n=1}^{m} \varepsilon^n Y_n(t) \right] \frac{d\zeta}{dt} = \left\{ A \left[UVe^{iRt} + \sum_{n=1}^{m} \varepsilon^n Y_n(t) \right] + \right.$$

$$\left. + \varepsilon F(t) \left[UVe^{iRt} + \sum_{n=1}^{m} \varepsilon^n Y_n(t) \right] - \left[UVe^{iRt} + \sum_{n=1}^{m} \varepsilon^n Y_n'(t) \right] \right\} \zeta.$$

Вычитая из обеих частей этого равенства выражение $\left[\sum_{k=}^{m} \varepsilon^k \mathfrak{A}_k \right] \zeta$, получаем уравнение

$$\left[UVe^{iRt} + \sum_{n=1}^{m} \varepsilon^n Y_n(t) \right] \frac{d\zeta}{dt} - \left(\sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \mathfrak{A}_k \right) \zeta = \Big\{ [A + \varepsilon F(t)] \times$$

$$\times \left[UVe^{iRt} + \sum_{n=1}^{m} \varepsilon^n Y_n(t) \right] - \left[\left(UViRe^{iRt} + \sum_{n=1}^{m} \varepsilon^n Y_n'(t) \right) - \right.$$

$$\left. - \left(UVe^{iRt} \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \mathfrak{A}_k + \sum_{n=1}^{m} \varepsilon^n Y_n(t) \cdot \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \mathfrak{A}_k \right) \right] \Big\} \zeta, \tag{17}$$

правая часть которого имеет тот же вид, что и (6), если в последнем перенести все члены в одну сторону, учесть (5) и вместо бесконечных рядов рассматривать конечные суммы. Прибавляя к обеим частям (17) выражение (6) с перенесенными в одну сторону членами, получаем

$$\left[UVe^{iRt} + \sum_{n=1}^{m} \varepsilon^n Y_n(t) \right] \left[\frac{d\zeta}{dt} - \left(\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \mathfrak{A}_k \right) \zeta \right] = \varepsilon^{m+1} S(t, \varepsilon) \zeta,$$

где $S(t, \varepsilon)$ — оператор класса Σ. Последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{d\zeta}{dt}=\left(\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^k\mathfrak{A}_k\right)\zeta+\varepsilon^{m+1}R_m(t,\varepsilon)\zeta,$$

где

$$R_m(t,\varepsilon)=\left[UVe^{iRt}+\sum_{n=1}^{m}\varepsilon^nY_n(t)\right]^{-1}S(t,\varepsilon).$$

Лемма доказана.

Под m-м приближением понимаем

$$x_m=\left[UVe^{iRt}+\sum_{n=1}^{m}\varepsilon^nY_n(t)\right]\zeta_m, \tag{18}$$

где ζ_m удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\zeta_m}{dt}=\left(\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^k\mathfrak{A}_k\right)\zeta_m. \tag{19}$$

Теорема 3. *Для любого $L>0$ можно найти такие $\varepsilon_m^*>0$ и $c_m^*>0$ (c_m — постоянная), что для всех t, $0\leqslant t\leqslant L$, имеет место асимптотическая оценка*

$$\|\zeta-\zeta_m\|\leqslant c_m\varepsilon^{m+1}, \tag{20}$$

где $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_m^*$.

Доказательство. Пусть

$$\zeta_m=V_m(t,\varepsilon)\zeta_m^0 —$$

интеграл уравнения (19), удовлетворяющий при $t=0$ начальному условию $\zeta(0)=\zeta_m^0$. Отметим сразу же, что в силу ограниченности операторов $\mathfrak{A}_k$ этот интеграл имеет вид

$$\zeta_m=e^{t\sum\limits_{k=0}^{m}\varepsilon^k\mathfrak{A}_k}\zeta_m^0 \tag{21}$$

и, следовательно,

$$\|V_m(t,\varepsilon)\|\leqslant e^{t\sum\limits_{k=0}^{m}\varepsilon^k\|\mathfrak{A}_k\|}. \tag{22}$$

Решение уравнения (16) запишется тогда в виде

$$\zeta=V_m(t,\varepsilon)\zeta_m^0+\varepsilon^{m+1}\int_0^t R_m(t,\varepsilon)V_m(t-\tau,\varepsilon)\zeta(\tau)\,d\tau. \tag{23}$$

Оценим погрешность m-го приближения решения системы: Рассмотрим разность между точным решением (15) уравнения (1) и его m-м приближением (18):

$$x-x_m=\left[UVe^{iRt}+\sum_{n=1}^{m}\varepsilon^nY_n(t)\right][\zeta-\zeta_m].$$

Отсюда видно, что для оценки между точным решением и его m-м приближением необходимо прежде оценить разность $\zeta-\zeta_m$. Учитывая вид выражений ζ и ζ_m [(21), (23)] получаем

$$\zeta-\zeta_m=\varepsilon^{m+1}\int_0^t R_m(\tau,\varepsilon)V_m(t-\tau,\varepsilon)\zeta(\tau)\,d\tau,$$

откуда

$$\|\zeta-\zeta_m\| < \varepsilon^{m+1}\int\limits_0^t \|R_m(\tau,\varepsilon)\|\,\|V_m(t-\tau,\varepsilon\|\|\,\zeta(\tau)\|\,d\tau. \tag{24}$$

Очевидно, можно указать такие $\varepsilon_m > 0$ и положительную постоянную относительно t величину ν_m, чтобы при

$$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_m$$

выполнялось неравенство

$$\|R_m(\tau,\varepsilon)\|\leqslant\nu_m. \tag{25}$$

Обозначим

$$\sup_\tau\|V_m(\tau,\varepsilon)\|=N_m, \tag{26}$$

$$\sup_\tau\|\zeta(\tau)\|=M. \tag{27}$$

Из (24) видно, что прежде всего необходимо оценить ζ. Для этого оценим (23):

$$\|\zeta\|\leqslant\|V_m(\tau,\varepsilon)\|\,\|\zeta_m^0\|+\varepsilon^{m+1}\int\limits_0^t\|R_m(\tau,\varepsilon)\|\,\|V_m(t-\tau,\varepsilon)\|\,\|\zeta\|\,d\tau.$$

Учитывая введенные обозначения (26), (27) и неравенство (25), получаем

$$M\leqslant N_m\|\zeta_m^0\|+\varepsilon^{m+1}\nu_m M\int\limits_0^t\|V_m(t-\tau,\varepsilon)\|\,d\tau. \tag{28}$$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^t\|V_m(t-\tau,\varepsilon)\|\,d\tau$. Заменой переменных $t-\tau=z$ сведем этот интеграл к $\int\limits_0^t\|V_m(z,\varepsilon)\|\,dz$. Тогда из (28) получим

$$M\leqslant\frac{N_m}{1-\nu_m\varepsilon^{m+1}\int\limits_0^t\|V_m(z,\varepsilon)\|\,dz}\|\zeta_m^0\|$$

для $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_m$ и

$$\varepsilon<\sqrt{\frac{1}{\nu_m\int\limits_0^t\|V_m(z,\varepsilon)\|\,dz}}.$$

Отметим, что для любого фиксированного $L\geqslant 0$ при достаточно малых ε

$$\frac{1}{1-\nu_m\varepsilon^{m+1}\int\limits_0^t\|V_m(z,\varepsilon)\|\,dz}\leqslant\eta<0. \tag{29}$$

Поскольку $\|\zeta\|<M$, то из (29) получим

$$\|\zeta-\zeta_m\|\leqslant\varepsilon^{m+1}\nu_m\|\zeta_m^0\|\int\limits_0^t\|V_m(t-\tau,\varepsilon)\|\times$$

$$\times\frac{N_m}{1-\nu_m\varepsilon^{m+1}\int\limits_0^t\|V_m(z,\varepsilon)\|\,dz}\,d\tau.$$

При постоянном t, учитывая (22), (26), (29) получаем (20).

Как легко видеть, в теореме 3

$$c_m = \nu_m \| \zeta_m^0 \| L\eta e^{L \sum\limits_{k=0}^{m} (\varepsilon_m^*)^k \|\mathfrak{A}_k\|}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Ф. Фещенко, Докторская диссертация, К., 1950.
2. Ю. Л. Далецкий, ДАН СССР, т. 92, № 5, 1952.
3. М. С. Лившиц, Матем. сб., т. 34 (76), вып. 1, 1954.
4. М. С. Бродский и М. С. Лившиц, УМН, т. XIII, вып. 1 (79), 1958.
5. И. З. Штокало, Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, К., 1960.
6. Р. Кук, Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., 1960.

Поступила 6.I 1962 г.

Киев