Параметрическое воздействие случайной силы на нелинейную колебательную систему

В. Г. Коломиец

Рассмотрение и учет флуктуационных составляющих случайных сил осуществлено асимптотическим методом Н. М. Крылова—Н. Н. Боголюбова [1], соответствующим параметрическим колебаниям без флуктуационных воздействий.

1. Пусть уравнение нелинейной колебательной системы имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 [1 + \xi(t)] x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — случайная функция, описывающая стационарный случайный процесс, ε — малый положительный параметр.

Стационарный случайный процесс представляет собой режим хаотических пульсаций около некоторого среднего значения.

Рассмотрим поведение колебательной системы в зависимости от параметрического изменения коэффициента, характеризующего собственную частоту, который подвержен флуктуационным воздействиям. Флуктуации $\xi(t)$ могут быть любого характера (с нормальной, релеевской и другой плотностью вероятности).

Наличие слабой нелинейности в уравнении (1) приводит к ограничению роста амплитуды колебаний, в то время как параметрические флуктуации $\xi(t)$ или возбуждают систему, или дают дополнительное увеличение амплитуды колебаний в зависимости от характера колебательной системы.

Общее рассмотрение вопроса о характере воздействия флуктуаций в нелинейных системах было дано в работе [2].

Ограничимся рассмотрением влияния случайных возмущений $\xi(t)$ на амплитуду и фазу основной гармоники колебаний. Решение уравнения (1) в первом приближении находим в следующем виде [1]

$$x = a\cos\psi, \qquad \frac{dx}{dt} = -a\omega\sin\psi \qquad (\psi = \omega t + \theta). \tag{2}$$

Величины a и θ как функции времени определяются точными дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a\cos\psi, \ -a\omega\sin\psi)\sin\psi + \frac{1}{2}a\omega\xi\sin 2\psi, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{a\omega} f(a\cos\psi, \ -a\omega\sin\psi)\cos\psi + \omega\xi\cos^2\psi. \end{aligned} \tag{3}$$

Следовательно, решение уравнения (1) сводится к решению системы дифференциальных уравнений (3). Правые части уравнений (3) обладают по отношению к независимой переменной t периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$; $\frac{da}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt}$ пропорциональны малому параметру ε, так что при малой интенсивности флуктуационного воздействия a и θ будут медленно изменяющимися функциями времени.

Малая интенсивность параметрических флуктуаций вызывает малое изменение амплитуды и фазы колебательного процесса в течение периода T.

Разлагая правые части (3) в ряд Фурье, произведя усреднение за период T при фиксированных a и θ, а также перейдя к центрированным случайным функциям, получаем следующие «укороченные» уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}\frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{a\omega}K_0(a) + m_1 + \xi_1(t), \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{a\omega}P_0(a) + m_2 + \xi_2(t), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$K_0(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi,$$

$$P_0(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\cos\psi\, d\psi,$$

$$m_1 = \frac{1}{2}\,\omega\overline{\xi\sin 2\psi},$$

$$m_2 = \omega\overline{\xi\cos^2\psi},$$

$$\xi_1(t) = \frac{1}{2}\,\omega\xi\sin 2\psi - m_1,$$

$$\xi_2(t) = \omega\xi\cos^2\psi - m_2,$$

где черта сверху означает среднее значение.

Очевидно, $\overline{\xi_1(t)} = 0$, $\overline{\xi_2(t)} = 0$.

Введя новую неизвестную функцию $u = \ln a$ [3] и обозначив

$$\begin{aligned} U(u) &= -\frac{\varepsilon}{\omega}e^{-u}K_0(e^u) + m_1, \\ \Theta(u) &= -\frac{\varepsilon}{\omega}e^{-u}P_0(e^u) + m_2, \end{aligned} \tag{5}$$

перепишем уравнения (4) в более удобном виде для исследования:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= U(u) + \xi_1(t), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \Theta(u) + \xi_2(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Проследим за колебательной системой в течение большого промежутка времени, значительно превосходящего время корреляции $\tau_{кор}$ случайной функции $\xi(t)$. Тогда эволюцию амплитуды и фазы можно представлять себе как стохастический процесс без последствия.

В теории таких процессов центральное место занимают уравнения Эйнштейна — Фоккера — Планка. Метод этих уравнений имеет то большое вычислительное преимущество, что непосредственно дает квадратуру стационарного решения.

Система уравнений (6) в самом общем виде трудно поддается решению. Однако при ее помощи можно получить ряд частных результатов. Исследование этих уравнений осуществлено путем перехода к уравнениям для плотности вероятности, т. е. к уравнениям Эйнштейна—Фоккера — Планка.

Согласно первому уравнению (6) для изменяющейся во времени плотности распределения логарифма амплитуды имеем следующее уравнение Эйнштейна — Фоккера — Планка

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial u}[U(u)P]=\frac{1}{2}\sigma_1^2\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}, \tag{7}$$

где

$$\sigma_1^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{\xi_1\xi_{1\tau}}\,d\tau, \qquad \xi_{1\tau}=\xi_1(t+\tau).$$

Практически важен случай, когда распределение вероятностей с возрастанием времени стремится к предельному. Соответствующее ему уравнение примет вид

$$\frac{\sigma_1^2}{2}\frac{d^2P}{du^2}-\frac{d}{du}[U(u)P]=0. \tag{8}$$

При выполнении условий А. А. Андронова [2] уравнение (8) легко решается. Соответствующая квадратура стационарного решения будет иметь вид

$$P(u)=C\exp\left\{\frac{2}{\sigma_1^2}\int\limits_0^u U(y)\,dy\right\}. \tag{9}$$

Постоянная C определяется из условия нормирования плотности распределения $P(u)$. Напишем уравнение Эйнштейна — Фоккера — Планка для плотности распределения фазы

$$\frac{\partial P}{dt}+\frac{\partial}{\partial\theta}[\Theta(u)P]=\frac{1}{2}\sigma_2^2\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}, \tag{10}$$

где

$$\sigma_2^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{\xi_2\xi_{2\tau}}\,d\tau, \qquad \xi_{2\tau}=\xi_2(t+\tau).$$

При каждом фиксированном значении амплитуды будет устанавливаться либо равновесное распределение по фазам $\left(\frac{\partial P}{\partial t}=0\right)$, либо диффузионное расплывание фазы. При предположении малого статистического разброса амплитуды u можно заменить невозмущенным значением u_0. При нахождении равновесного распределения фаз возникают две произвольные постоянные, которые определяются из условий периодичности и нормировки плотности распределения для фазы.

2. В качестве примера нелинейной системы, подверженной влияниям параметрических флуктуаций, рассмотрим автоколебательную систему, описываемую уравнением Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [1 + \xi(t)]\, x = \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{dt}. \tag{11}$$

«Укороченные» уравнения, описывающие изменение амплитуды и фазы, для (11) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{\partial t} &= \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{4} e^{2u}\right) + m_1 + \xi_1(t), \\ \frac{d\theta}{dt} &= m_2 + \xi_2(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Уравнение Эйнштейна — Фоккера — Планка для $u = \ln a$ запишется в виде

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u}\left\{\left[m_1 + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{4} e^{2u}\right)\right] P\right\} = \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}. \tag{13}$$

Это уравнение имеет стационарное решение при $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$

$$P(a) = 2\Gamma^{-1}\left[\frac{1}{\sigma_1^2}\left(m_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]\left(\frac{\varepsilon}{8\sigma_1^2}\right)^{\frac{1}{\sigma_1^2}\left(m_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)} \times$$

$$\times a^{\frac{2}{\sigma_1^2}\left(m_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - 1} \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{8\sigma_1^2} a^2\right\}, \tag{14}$$

где Γ — гамма-функция.

Решение получено методом, развитым в работе [2]. Не зависящее от начальных условий, оно в наилучшей степени отражает свойства амплитуды колебательной системы (11). Поскольку $m_2 = 0$ [3], уравнение Эйнштейна — Фоккера — Планка для θ превращается в уравнение диффузии

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma_2^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}. \tag{15}$$

Следовательно, здесь имеется диффузионное расплывание фазы $\overline{\Delta\theta^2} = \sigma_2^2 t$. Набег фазы $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ за время $t \gg \tau_{кор}$ будет характеризоваться нормальным законом распределения

$$P(\theta, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sigma_2^2 t}} \exp\left\{-\frac{2\Delta\theta^2}{\sigma_2^2 t}\right\}. \tag{16}$$

Формула (16) является решением уравнения (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.

2. А. А. Андронов, Собр. тр., Изд-во АН СССР, 1956.

3. Р. Л. Стратонович, Ю. М. Романовский, Научн. докл. высш. шк., Физ.-матем. науки, № 3, 1958.

4. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТЛ, 1951.

Поступила 24.I 1962 г.
Киев