О существовании и свойствах интегрального многообразия одной системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

В. И. Фодчук

В настоящей работе доказывается существование интегрального многообразия системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вида

$$\frac{dh(t)}{dt} = Hh(t) + H_1 h(t-\Delta) + Q(t, g(t), g(t-\Delta), h(t), h(t-\Delta), \varepsilon),$$
$$\frac{dg(t)}{dt} = \omega + P(t, g(t), g(t-\Delta), h(t), h(t-\Delta), \varepsilon), \tag{1}$$

где $h(t)$, $h(t-\Delta)$ — векторы n-мерного эвклидова пространства E^n, $g(t)$ — скаляр, ω — постоянная, Δ — постоянное положительное запаздывание, H, H_1 — постоянные матрицы порядка n.

Изучаются некоторые свойства этого многообразия, в частности, установлено свойство притяжения интегральным многообразием траекторий любых решений системы (1), не лежащих на нем, но начальные функции которых выходят из некоторой области, принадлежащей области определения многообразия.

Относительно рассматриваемой системы (1) предполагаем выполнение следующих условий:

1) функция $P(t, g(t), g(t-\Delta), h(t), h(t-\Delta), \varepsilon)$ и n-мерная вектор-функция $Q(t, g(t), g(t-\Delta), h(t), h(t-\Delta), \varepsilon)$ определены и непрерывны по всем аргументам в области

$$t \in (-\infty, \infty),\ g(t),\ g(t-\Delta) \in (-\infty, \infty), \tag{2}$$
$$h(t),\ h(t-\Delta) \in U_{\varrho_0},\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$$

и обладают периодом 2π по отношению к переменным $g(t)$, $g(t-\Delta)$, где U_{ϱ_0} — область в пространстве E^n, в которой $|h| < \varrho_0$;

2) при $t \in (-\infty, \infty)$, $g(t)$, $g(t-\Delta) \in (-\infty, \infty)$, $h(t) = h(t-\Delta) = 0$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |P(t, g(t),\ g(t-\Delta),\ 0, 0, \varepsilon)| &\leqslant M(\varepsilon), \\ |Q(t, g(t),\ g(t-\Delta),\ 0, 0, \varepsilon)| &\leqslant M(\varepsilon), \end{aligned} \tag{3}$$

где $M(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$;

3) для любого положительного $\sigma < \varrho_0$ в области

$$t \in (-\infty, \infty),\ g(t),\ g(t-\Delta) \in (-\infty, \infty),$$
$$h(t),\ h(t-\Delta) \in U_\sigma,\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$$

функции $P(t, g(t), g(t-\Delta), h(t), h(t-\Delta), \varepsilon)$, $Q(t, g(t), g(t-\Delta), h(t), h(t-\Delta), \varepsilon)$ удовлетворяют условиям Липшица по $g(t)$, $g(t-\Delta)$, $h(t)$, $h(t-\Delta)$, с константой $\lambda(\varepsilon, \sigma) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\sigma \to 0$;

4) все вещественные части корней $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ уравнения

$$\mathrm{Det}\,\{Ep - H - H_1 e^{-\Delta p}\} = 0$$

отличны от нуля и отрицательны, т. е.

$$\mathrm{Re}\,(p_k) \leqslant -\gamma_0 < 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n, \ldots),$$

и, следовательно, для матрицы $V(t, \tau)$, удовлетворяющей при $t > \tau$ уравнению

$$\frac{dV(t, \tau)}{dt} = HV(t, \tau) + H_1 V(t-\Delta, \tau) \tag{4}$$

и начальным условиям

$$V(t, \tau)|_{t<\tau} \equiv 0,\ V(t, \tau)|_{t=\tau} = E,$$

справедлива оценка (см. [1])

$$|V(t, \tau)| \leq K e^{-\gamma_1(t-\tau)},\ t \geqslant \tau, \tag{5}$$

где K и γ_1 — некоторые положительные постоянные, причем $\gamma_1 < \gamma_0$, E — единичная n-мерная матрица.

Полученные здесь результаты являются обобщением некоторых теорем Н. Н. Боголюбова, изложенных в монографии [2], на систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вида (1). Доказательство сформулированных ниже теорем проводится с помощью метода Н. Н. Боголюбова.

Теорема 1. *Если система* (1) *удовлетворяет условиям 1—4, то можно указать такое положительное* $\bar{\varepsilon}$ $(\bar{\varepsilon} < \varepsilon_0)$, *что для каждого* $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$ *эта система имеет интегральное многообразие, представимое соотношением вида*

$$h = f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon), \tag{6}$$

в котором $f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon)$ *как функция* t, $g(t)$, $g(t-\Delta)$ *определена для* $t \in (-\infty, \infty)$, $g(t), g(t-\Delta) \in (-\infty, \infty)$ *и удовлетворяет неравенствам*

$$|f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon)| \leq D(\varepsilon) < \varrho_0,$$

$$|f(t, g'(t), g'(t-\Delta), \varepsilon) - f(t, g''(t), g''(t-\Delta), \varepsilon)| \leqslant \tag{7}$$

$$\leqslant \gamma(\varepsilon)\{|g'(t) - g''(t)| + |g'(t-\Delta) - g''(t-\Delta)|\},$$

причем $D(\varepsilon) \to 0$, $\gamma(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Функция* $f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon)$ *обладает периодом* 2π *по отношению к переменным* $g(t)$, $g(t-\Delta)$.

Изложим вкратце лишь основные идеи доказательства теоремы 1.

Рассмотрим некоторый класс $C(D, \gamma)$ функций $F[t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon]$, где D, γ — фиксированные положительные числа со значениями из E^n, определенных для $t \in (-\infty, \infty)$, $g(t)$, $g(t-\Delta) \in (-\infty, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|F[t, g(t), g(t-\Delta)]| < D,$$

$$|F[t, g'(t), g'(t-\Delta)] - F[t, g''(t), g''(t-\Delta)]| \leqslant \tag{8}$$

$$\leqslant \gamma\{|g'(t) - g''(t)| + |g'(t-\Delta) - g''(t-\Delta)|\}$$

и обладающих периодом 2π по отношению к переменным $g(t)$, $g(t-\Delta)$.

Возьмем некоторую функцию $F[t, g(t), g(t-\Delta)]$ из класса $C(D, \gamma)$ и рассмотрим для нее уравнение

$$\frac{dg(t)}{dt} = \omega + P(t, g(t), g(t-\Delta), F[t, g(t), g(t-\Delta)], F[t - $$

$$- \Delta, g(t-\Delta), g(t-2\Delta)], \varepsilon) \tag{9}$$

Задаваясь произвольными начальными значениями $g(t) = g_0(t)$ для $t \in [t_0 - \Delta, t_0]$, где $g_0(t)$ взята из некоторого класса непрерывных функций C°, мы можем построить решение уравнения (9) для $t \geqq t_0$, причем оно будет единственным. Обозначим его символически через $g_t = T^F_{z,t_0}(g_0(t))$, где $z = t - t_0$.

Рассмотрим теперь, как и в работе Ю. А. Митропольского [3], преобразование S функции $F[t, g(t), g(t-\Delta)]$ из класса $C(D, \gamma)$ в функцию

$$S_{t,g}(F) = \int\limits_{-\infty}^{0} V(t, t+z) Q\{t+z;\ T^F_{z,t}(g(t));\ T^F_{z+\Delta,t-\Delta}(g(t));$$

$$F[t+z;\ T^F_{z,t}(g(t));\ T^F_{z+\Delta,t-\Delta}(g(t))];\ F[t+z-\Delta;\ T^F_{z+\Delta,t-\Delta}(g(t));$$

$$T^F_{z+2\Delta,t-2\Delta}(g(t))];\ \varepsilon\}\ dt. \tag{10}$$

Затем доказываем, что преобразование (10) отображает класс функций $C(D, \gamma)$ сам на себя и при этом имеет место неравенство

$$|SF^* - SF| < \frac{1}{q}|F^* - F|, \qquad q > 1,$$

что и обеспечивает существование единственного решения уравнения

$$SF = F, \tag{11}$$

которое мы обозначим через $f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon)$. Функция $f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon)$ будет периодична (с периодом 2π) по $g(t)$ и $g(t-\Delta)$.

Для завершения доказательства остается показать, что соотношение

$$h = f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon) \tag{12}$$

определяет интегральное многообразие для системы (1).

Для этого подставляем в уравнение (11) вместо F функцию (12), заменяем в полученном тождестве $g(t)$ на $T^f_{z,t}(g(t))$ и вводим новую переменную

$$|f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon)| \leq D(\varepsilon) < \varrho_0,$$

$$|f(t, g'(t), g'(t-\Delta), \varepsilon) - f(t, g''(t), g''(t-\Delta), \varepsilon)| \leqslant \tag{7}$$

$$\leqslant \gamma(\varepsilon)\{|g'(t) - g''(t)| + |g'(t-\Delta) - g''(t-\Delta)|\},$$

причем $D(\varepsilon) \to 0$, $\gamma(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Функция* $f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon)$ *обладает периодом* 2π *по отношению к переменным* $g(t)$, $g(t-\Delta)$.

Изложим вкратце лишь основные идеи доказательства теоремы 1.

Рассмотрим некоторый класс $C(D, \gamma)$ функций $F[t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon]$, где D, γ — фиксированные положительные числа со значениями из E^n, определенных для $t \in (-\infty, \infty)$, $g(t)$, $g(t-\Delta) \in (-\infty, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|F[t, g(t), g(t-\Delta)]| < D,$$

$$|F[t, g'(t), g'(t-\Delta)] - F[t, g''(t), g''(t-\Delta)]| \leqslant \tag{8}$$

$$\leqslant \gamma\{|g'(t) - g''(t)| + |g'(t-\Delta) - g''(t-\Delta)|\}$$

и обладающих периодом 2π по отношению к переменным $g(t)$, $g(t-\Delta)$.

Возьмем некоторую функцию $F[t, g(t), g(t-\Delta)]$ из класса $C(D, \gamma)$ и рассмотрим для нее уравнение

$$\frac{dg(t)}{dt} = \omega + P(t, g(t), g(t-\Delta), F[t, g(t), g(t-\Delta)], F[t -$$

$$- \Delta, g(t-\Delta), g(t-2\Delta)], \varepsilon) \tag{9}$$

Задаваясь произвольными начальными значениями $g(t) = g_0(t)$ для $t \in [t_0 - \Delta, t_0]$, где $g_0(t)$ взята из некоторого класса непрерывных функций C°, мы можем построить решение уравнения (9) для $t \geqq t_0$, причем оно будет единственным. Обозначим его символически через $g_t = T^F_{z,t_0}(g_0(t))$, где $z = t - t_0$.

Рассмотрим теперь, как и в работе Ю. А. Митропольского [3], преобразование S функции $F[t, g(t), g(t-\Delta)]$ из класса $C(D, \gamma)$ в функцию

$$S_{t,g}(F) = \int_{-\infty}^{0} V(t, t+z)\, Q\{t+z;\ T^F_{z,t}(g(t));\ T^F_{z+\Delta,t-\Delta}(g(t));$$

$$F[t+z;\ T^F_{z,t}(g(t));\ T^F_{z+\Delta,t-\Delta}(g(t))];\ F[t+z-\Delta;\ T^F_{z+\Delta,t-\Delta}(g(t));$$

$$T^F_{z+2\Delta,t-2\Delta}(g(t))];\ \varepsilon\}\ dt. \tag{10}$$

Затем доказываем, что преобразование (10) отображает класс функций $C(D, \gamma)$ сам на себя и при этом имеет место неравенство

$$|SF^* - SF| < \frac{1}{q}|F^* - F|, \qquad q > 1,$$

что и обеспечивает существование единственного решения уравнения

$$SF = F, \tag{11}$$

которое мы обозначим через $f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon)$. Функция $f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon)$ будет периодична (с периодом 2π) по $g(t)$ и $g(t-\Delta)$.

Для завершения доказательства остается показать, что соотношение

$$h = f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon) \tag{12}$$

определяет интегральное многообразие для системы (1).

Для этого подставляем в уравнение (11) вместо F функцию (12), заменяем в полученном тождестве $g(t)$ на $T^f_{z,t}(g(t))$ и вводим новую переменную интегрирования $\tau = z + t$. Полагая затем для краткости

$$f[t, T^t_{t-t_0 t_0}(g(t)),\ T^t_{t-t_0+\Delta, t_0-\Delta}(g(t)), \varepsilon] = h_t,$$
$$T^t_{t-t_0, t_0}(g(t)) = g_t, \tag{13}$$

получаем тождество

$$h_t = \int\limits_{-\infty}^{t} V(t, \tau)\, Q(\tau, g_\tau, g_{\tau-\Delta}, h_\tau, h_{\tau-\Delta}, \varepsilon)\, d\tau. \tag{14}$$

Дифференцируя его по t как по параметру, находим

$$\frac{dh_t}{dt} = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{dV(t, \tau)}{dt} Q(\tau, g_\tau, g_{\tau-\Delta}, h_\tau, h_{\tau-\Delta}, \varepsilon)\, d\tau +$$
$$+ Q(t, g_t, g_{t-\Delta}, h_t, h_{t-\Delta}, \varepsilon). \tag{15}$$

Отсюда, согласно (4) и (14), окончательно получаем

$$\frac{dh_t}{dt} = Hh_t + H_1 h_{t-\Delta} + Q(t, g_t, g_{t-\Delta}, h_t, h_{t-\Delta}, \varepsilon).$$

Заметим, что по самому определению функционала $T^t_{t-t_0, t_0}$ g_t, h_t удовлетворяют второму уравнению системы (1).

Следовательно, g_t, h_t, определяемые формулами (13), являются решениями системы (1), а выражение (12) является интегральным многообразием системы (1).

Теорема 2. *Если функции* $P(t, g(t), g(t-\Delta), h(t), h(t-\Delta), \varepsilon)$ *и* $Q(t, g(t), g(t-\Delta), h(t), h(t-\Delta), \varepsilon)$ *при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *имеют ограниченные и равномерно непрерывные производные* g *и* h *до* m*-го порядка включительно, то* $f(t, g(t), h(t-\Delta), \varepsilon)$ *также будет иметь ограниченные и равномерно непрерывные производные до* m*-го порядка включительно.*

Теорема 3. *Если существует последовательность чисел* $\{\tau_m\}$ *такая, что для некоторого* $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ *правые части уравнений* (1) *удовлетворяют равномерно для* $t \in (-\infty, \infty)$, $g(t)$, $g(t-\Delta) \in (-\infty, \infty)$, $h(t)$, $h(t-\Delta) \in U_{Q_0}$ *соотношениям*

$$|P(t + \tau_m, g(t), g(t-\Delta), h(t), h(t-\Delta), \varepsilon) -$$
$$- P(t, g(t), g(t-\Delta), h(t), h(t-\Delta), \varepsilon)| \underset{m\to\infty}{\to} 0,$$
$$|Q(t + \tau_m g(t), g(t-\Delta), h(t), h(t-\Delta), \varepsilon) -$$
$$- Q(t, g(t), g(t-\Delta), h(t), h(t-\Delta), \varepsilon)| \underset{m\to\infty}{\to} 0,$$

то для этого ε *равномерно для* $t \in (-\infty, \infty)$, $g(t)$, $g(t-\Delta) \in (-\infty, \infty)$ *справедливо соотношение*

$$|f(t + \tau_m, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon) - f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon)| \underset{m\to\infty}{\to} 0,$$

где $f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon)$ — *интегральное многообразие для системы* (1).

Следствие. Если функции $P(t, g(t), g(t-\Delta), h(t), h(t-\Delta), \varepsilon)$ и $Q(t, g(t), g(t-\Delta), h(t), h(t-\Delta), \varepsilon)$ являются почти периодическими функциями по t равномерно по отношению к $g(t)$, $g(t-\Delta)$, $h(t)$, $h(t-\Delta)$, для $t \in (-\infty, \infty)$, $g(t), g(t-\Delta) \in (-\infty, \infty)$, $h(t), h(t-\Delta) \in U_{Q_0}$, то функция $f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon)$ будет почти периодической функцией равномерно по отношению к $g(t), g(t-\Delta) \in (-\infty, \infty)$ с частотным базисом функций P и Q.

Теорема 4. *Можно указать такие положительные постоянные* ε_1, ϱ_1, $(\varepsilon_1 \leq \bar{\varepsilon} < \varepsilon_0,\ \varrho_1 < \varrho_0)$, *что для каждого* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ и *произвольного вещественного* t_0 *любое решение* h_t *системы* (1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$h_t = \varphi_0(t, \varepsilon) \text{ для } t \in [t_0 - \Delta, t_0], \qquad |\varphi_0(t, \varepsilon)| < \varrho_1, \tag{16}$$

где $\varphi_0(t, \varepsilon)$ — *непрерывная начальная функция, будет с течением времени асимптотически стремиться к единственному интегральному многообразию, параметрическое представление которого мы обозначили через* $f(t, g(t), g(t-\Delta), \varepsilon)$, *определенному и ограниченному для всех* $t \in (-\infty, \infty)$.

Замечание. При доказательстве теоремы 4 мы заменяем систему (1) с начальными условиями (16) системой интегро-дифференциальных уравнений подобно тому, как это делается в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
3. Ю. А. Митропольский, Об исследовании интегрального многообразия для системы нелинейных уравнений с переменными коэффициентами, УМЖ, т. X, № 3, 1958.
4. В. П. Рубаник, В. И. Фодчук, О существовании и свойствах ограниченного решения квазилинейных дифференциально-разностных уравнений, УМЖ, т. XIV, № 1, 1962.

Поступила 22.VII 1961 г.
Киев