Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра

А. М. Самойленко

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y, \lambda), \tag{1}$$

где λ — некоторый параметр, t — время, y, Y m-мерные векторы евклидова пространства E_m. Предположим, что

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_0^t Y(t, y, \lambda)\,dt = \int_0^t Y^0(t, y)\,dt \tag{2}$$

равномерно по t, y для $t \in [0, T]$, $y \in D$. Здесь T — положительное число, D — область пространства E_m.

Из работ [1 — 3] известны условия, при которых решения уравнения (1) при выполнении (2) равномерно сходятся к функции $y(t, \lambda_0)$, определяемой из уравнения

$$\frac{dy}{dt} = Y^0(t, y). \tag{3}$$

Из этих работ известно также, что (2) может допускать сходимость $y(t, \lambda)$ к функции, не являющейся решением уравнения (3).

Нахождению критериев, позволяющих судить о равномерной сходимости $y(t, \lambda)$ к $y(t, \lambda_0)$, когда $y(t, \lambda_0)$ определяется не из (3), посвящена настоящая статья.

В п. 1 доказывается теорема о непрерывной зависимости решений уравнения (1.1) от параметра. При $\Phi(t, y, \lambda) = 0$ она совпадает с результатом Я. Курцвейля и З. Ворела (теорема I, [1]).

В п. 2 выводится следствие из теоремы п. 1 для дифференциальных уравнений и выясняются условия, при которых равенство $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} y(t, \lambda) = y(t, \lambda_0)$ не влечет определения $y(t, \lambda_0)$ из (3). Здесь же указывается дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $y(t, \lambda_0)$.

В п. 3 применяются предыдущие результаты к дифференциальным уравнениям, характеризующим автоколебания под действием мгновенных импульсов, и колебания, возбуждаемые высокочастотными периодическими возмущениями.

1. Пусть в уравнении

$$x(t, \lambda) = x(0, \lambda) + \Phi(t, x(t, \lambda), \lambda) + \int_0^t X(t, x(t, \lambda), \lambda)\,dt, \tag{1.1}$$

как и раньше, λ — параметр, t — время, x, Φ, X m-мерные векторы пространства E_m, $x(0, \lambda)$ — произвольная постоянная, $\Phi(0, x, \lambda) = 0$.

Предположим, что относительно $\Phi(t, x, \lambda)$ и $X(t, x, \lambda)$ выполняются условия:

1) Существуют область $D, D \subset E_m$ и интервал $[\lambda_0, \lambda_1]$ такие, что $X(t, x, \lambda)$ измерима по t при фиксированных $(x, \lambda) \in D \times [\lambda_0, \lambda_1]$, непрерывна по x при фиксированных $(t, \lambda) \in [0, T] \times [\lambda_0, \lambda_1]$; $\Phi(t, x, \lambda)$ равномерно непрерывна как функция переменных $(t, x, \lambda) \in [0, T] \times D \times [\lambda_0, \lambda_1]$.

2) Существуют постоянная M и интегрируемая по Лебегу на $[0, T]$ функция $m(t, \lambda)$, $\int\limits_0^T m(t, \lambda)\, dt < M$, такие, что

$$||X(t, x, \lambda)|| \leqq m(t, \lambda),$$
$$||\Phi(t, x, \lambda)|| \leqq M$$

для $(t, x, \lambda) \in [0, T] \times D \times [\lambda_0, \lambda_1]$.

3) Существуют неубывающая функция $\psi_1(\delta)$, $\lim\limits_{\delta \to 0} \psi_1(\delta) = 0$, интегрируемая по Лебегу функция $\chi(t) \geq 0$, $\int\limits_0^T \chi(t)\, dt < \infty$, и положительное число α, $\alpha < 1$, такие, что

$$||X(t, x', \lambda) - X(t, x'', \lambda)|| \leqq \psi_1(||x' - x''||) \cdot \chi(t),$$
$$||\Phi(t, x', \lambda) - \Phi(t, x'', \lambda)|| \leqq \alpha ||x' - x''||$$

для $x', x'' \in D$, $t \in [0, T]$, $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$.

4) Существует решение $x(t, \lambda_0)$ уравнения (1.1) при $\lambda = \lambda_0$, определенное для $t \in [0, T]$, такое, что если $v(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) при $\lambda = \lambda_0$ на интервале $[0, T_1]$, $0 < T_1 \leqq T$, и $v(0) = x(0, \lambda_0)$, то $v(t) = x(t, \lambda_0)$ для $t \in [0, T_1]$.

Теорема. *Пусть выполняются условия 1) — 4) и*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int\limits_0^t X(t, x, \lambda)\, dt = \int\limits_0^t X(t, x, \lambda_0)\, dt \tag{1.2}$$

равномерно по t и x. Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $x(t, \lambda)$ — решение уравнения (1.1), определенное на $[0, T]$, то

$$||x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)|| < \varepsilon$$

лишь только $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $||x(0, \lambda) - x(0, \lambda_0)|| < \delta$, $t \in [0, T]$.

Лемма 1. *Пусть $y(t, \lambda)$ — система непрерывных функций переменного t, $y(t, \lambda) \in D$ и*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \max_{0 \leqq t \leqq T} || y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0) || = 0$$

Тогда

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int\limits_0^t X(t, y(t, \lambda), \lambda)\, dt = \int\limits_0^t X(t, y(t, \lambda), \lambda)\, dt, \tag{1.3}$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \Phi(t, y(t, \lambda), \lambda) = \Phi(t, y(t, \lambda_0), \lambda_0) \tag{1.4}$$

равномерно по t.

Равенство (1.3) легко следует из обычных оценок интеграла (см. также [1]), а (1.4) — из непрерывности $\Phi(t, x, \lambda)$ как функции переменных (t, x, λ).

Лемма 2. *Пусть $x(t, \lambda_n)$, $n = 1, 2, \ldots,$ — решения уравнения (1.1), определенные на $[0, T]$ для $\lambda = \lambda_n$, $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} x(0, \lambda_n) = x(0, \lambda_0)$ Тог-*

да $x(t,\lambda_n)$ — последовательность равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных функций.

Доказательство. Возьмем произвольно $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$ и оценим

$$\| x(t_2,\lambda_n) - x(t_1,\lambda_n) \| = \| \Phi(t_2, x(t_2,\lambda_n),\lambda_n) - \\ - \Phi(t_1, x(t_1,\lambda_n),\lambda_n) + \int_{t_1}^{t_2} X(t, x(t,\lambda_n),\lambda_n)\, dt \|.$$

С учетом (1.2) и непрерывности $\Phi(t,x,\lambda)$ по λ имеем

$$\begin{gathered} \left\| \int_{t_1}^{t_2} X(t, x(t_1,\lambda_n),\lambda_n)\, dt \right\| \leqq \int_{t_1}^{t_2} \left\| X(t, x(t_1,\lambda_n),\lambda_0) \right\| dt + A(|\lambda_n - \lambda_0|), \\ \| \Phi(t_i, x(t_i,\lambda_n),\lambda_n) - \Phi(t_i, x(t_i,\lambda_n),\lambda_0) \| \leqq A(|\lambda_n - \lambda_0|). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь $i = 1,2$, $\lim\limits_{n\to\infty} A(|\lambda_n - \lambda_0|) = 0$. Далее, из $\| X(t, x(t_1,\lambda_n),\lambda_0) \| \leqq m(t,\lambda_0)$ и абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует

$$\int_{t_1}^{t_2} \| X(t, x(t_1,\lambda_n),\lambda_0) \|\, dt \leqq \int_{t_1}^{t_2} m(t,\lambda_0)\, dt \leqq c(t_2 - t_1), \tag{1.6}$$

где $\lim\limits_{t_2\to t_1} c(t_2 - t_1) = 0$. Учитывая (1.5), (1.6) и непрерывность $\Phi(t,x,\lambda_0)$ по t, получаем

$$\| x(t_2,\lambda_n) - x(t_1,\lambda_n) \| < \alpha \cdot \| x(t_2,\lambda_n) - x(t_1,\lambda_n) \| + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \| X(t, x(t,\lambda_n),\lambda_n) - X(t, x(t_1,\lambda_n),\lambda_n) \|\, dt + \\ + 3A(|\lambda_n - \lambda_0|) + c(t_2 - t_1) + d(t_2 - t_1).$$

Здесь $\lim\limits_{t_2\to t_1} d(t_2 - t_1) = 0$. Откуда

$$\| x(t_2,\lambda_n) - x(t_1,\lambda_n) \| < \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \| X(t, x(t,\lambda_n),\lambda_n) - \right. \\ \left. - X(t, x(t_1,\lambda_n),\lambda_n) \|\, dt + 3A(|\lambda_n - \lambda_0|) + c(t_2 - t_1) + d(t_2 - t_1) \right\}. \tag{1.7}$$

Предположим теперь, что лемма 2 неверна. Так как неравенство

$$\| x(t,\lambda) \| \leqq M + \| x(0,\lambda) \| + \int_0^T m(t,\lambda)\, dt < M_1$$

доказывает равномерную ограниченность последовательности $x(t,\lambda_n)$, то это предположение означает просто, что множество функций $x(t,\lambda_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, не является равностепенно непрерывным. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$, какое бы малое $\delta > 0$ и какое бы большое $N > 0$ ни взять, найдутся $t_1, t_2 \in [0, T]$, $|t_1 - t_2| < \delta$ такие, что

$$\| x(t_2,\lambda_n) - x(t_1,\lambda_n) \| \geqq \varepsilon \tag{1.8}$$

для $n > N$.

Из (1.8) и непрерывности $x(t, \lambda_n)$ по t следует существование t_3, $t_1 < t_3 \leqq t_2$, такого, что

$$\| x(t_3, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n) \| = \varepsilon, \qquad \| x(\tau, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n) \| < \varepsilon$$

для $t_1 \leqq \tau < t_3$. Для этого t_3

$$\int_{t_1}^{t_3} \| X(t, x(t, \lambda_n), \lambda_n) - X(t, x(t_1, \lambda_n), \lambda_n) \| \, dt \leqq \int_{t_1}^{t_3} \chi(t) \psi_1(\varepsilon) \, dt \leqq \psi_1(\varepsilon) c_1(t_3 - t_1). \tag{1.9}$$

Здесь $\lim\limits_{t_3 \to t_1} c_1(t_3 - t_1) = 0$.

Если взять теперь $\delta > 0$ и $N > 0$ такими, чтобы для $n > N$ было

$$\frac{3A(|\lambda_n - \lambda_0|)}{1 - \alpha} < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \frac{c(\delta)}{1 - \alpha} < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \frac{\psi_1(\varepsilon) c_1(\delta)}{1 - \alpha} < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\frac{d(\delta)}{1 - \alpha} < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{1.10}$$

то неравенство (1.7), где вместо t_2 следует взять t_3, вместе с неравенствами (1.9) и (1.10) ведет к противоречию, что и доказывает лемму 2.

Доказательство теоремы. Пусть $x(t, \lambda_n)$, $n = 1, 2, \ldots,$ — любая последовательность решений уравнения (1.1), определенная на интервале $[0, T)$ для $\lambda_n \underset{n \to \infty}{\to} \lambda_0$, $x(0, \lambda_n) \underset{n \to \infty}{\to} x(0, \lambda_0)$. По лемме 2 $x(t, \lambda_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, образует последовательность равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных функций. В силу известной теоремы Арцела — Асколи из этой последовательности можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Пусть $x(t, \lambda_n)$ и есть такая подпоследовательность. С учетом (1.3) и (1.4) получаем для нее

$$y(t) = \lim_{n \to \infty} x(t, \lambda_n) = x(0, \lambda_0) + \Phi(t, y(t), \lambda_0) + \int_0^t X(t, y(t), \lambda_0) \, dt$$

равномерно по $t \in [0, T]$. Так как $y(0) = x(0, \lambda_0)$, то согласно условиям 4) $y(t) = x(t, \lambda_0)$.

Теорема уже очевидна.

2. Возвратимся к дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y, \lambda). \tag{2.1}$$

Здесь $Y(t, y, \lambda)$ определено для $(t, y, \lambda) \in [0, T] \times D \times [\lambda_0, \lambda_1]$. Выделим из (2.1) уравнения, для которых, кроме

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_0^t Y(t, y, \lambda) \, dt = \int_0^t Y^0(t, y) \, dt \tag{2.2}$$

(здесь, как и раньше, (2,2) понимается в смысле равномерной сходимости), имеет место

$$d \left\{ \int_0^t Y(\tau, y, \lambda) \, d\tau \right\} = Y(t, y, \lambda) \, dt + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_0^t Y(\tau, y, \lambda) \, d\tau \right\} \cdot dy \tag{2.3}$$

для каждого фиксированного $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$, причем через $Y(t, y, \lambda_0)$ обозначена функция $Y^0(t, y)$.

Пусть $y(t, \lambda)$, $t \in [0, T]$ — решение такого уравнения. Записав (2.3) для разности

$$Y(t, y, \lambda) - Y(t, y, \lambda_0) \tag{2.4}$$

и подставив затем вместо y функцию $y(t, \lambda)$, получим

$$Y(t, y(t, \lambda), \lambda) - Y(t, y(t, \lambda), \lambda_0) \equiv \frac{d}{dt}\int_0^t [Y(\tau, y(t, \lambda), \lambda) -$$

$$- Y(\tau, y(t, \lambda), \lambda_0)]\, d\tau - \frac{\partial}{\partial y}\int_0^t [Y(\tau, y(t, \lambda), \lambda) -$$

$$- Y(\tau, y(t, \lambda), \lambda_0)]\, d\tau \cdot Y(t, y(t, \lambda), \lambda). \tag{2.5}$$

С использованием (2.5) уравнение (2.1), записанное в интегральной форме

$$y(t, \lambda) = y(0, \lambda) + \int_0^t Y(\tau, y(\tau, \lambda), \lambda)\, d\tau,$$

приводится к виду

$$y(t, \lambda) = y(0, \lambda) + \int_0^t Y(\tau, y(\tau, \lambda), \lambda_0)\, d\tau + \int_0^t [Y(\tau, y(t, \lambda), \lambda) -$$

$$- Y(\tau, y(t, \lambda), \lambda_0)]\, d\tau - \int_0^t \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int_0^\tau [Y(t, y(\tau, \lambda)\lambda) -\right.$$

$$\left.- Y(t, y(\tau, \lambda), \lambda_0)]\, dt\right\} \cdot Y(\tau, y(\tau, \lambda), \lambda)\, d\tau \tag{2.6}$$

Если наряду с $Y(t, y, \lambda)$ функция

$$Y_1(t, y, \lambda) = -\frac{\partial}{\partial y}\int_0^t [Y(t, y, \lambda) - Y(t, y, \lambda_0)]\, dt \cdot Y(t, y, \lambda)$$

удовлетворяет условиям (2.2) и (2.3), то уравнение (2.1) можно привести также к виду

$$y(t, \lambda) = y(0, \lambda) + \int_0^t [Y(\tau, y(\tau, \lambda), \lambda_0) + Y_1(\tau, y(\tau, \lambda)\lambda_0)]\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \{[Y(\tau, y(t, \lambda), \lambda) - Y(\tau, y(t, \lambda), \lambda_0)] + [Y_1(\tau, y(t, \lambda), \lambda) -$$

$$- Y_1(\tau, y(t, \lambda), \lambda_0)]\}\, d\tau - \int_0^t \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int_0^\tau [Y_1(t, y(\tau, \lambda), \lambda) -\right.$$

$$\left.- Y_1(t, y(\tau, \lambda), \lambda_0)]\, dt\right\} \cdot Y(\tau, y(\tau, \lambda), \lambda)\, d\tau. \tag{2.7}$$

Более того, если для $k = 1, 2, \ldots, l$ все

$$Y_k(t, y, \lambda) = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\int_0^t [Y_{k-1}(t, y, \lambda) - Y_{k-1}(t, y, \lambda_0)]\, dt\right\} \cdot Y(t, y, \lambda),$$

$$Y_0(t, y, \lambda) = Y(t, y, \lambda) \tag{2.8}$$

удовлетворяют условиям (2.2) и (2.3), то применение тождества (2.5) позволяет привести уравнение (2.1) к одному из видов:

$$y(t, \lambda) = y(0, \lambda) + \int_0^t \left[\sum_{k=0}^{n} Y_k(\tau, y(\tau, \lambda), \lambda_0)\right] d\tau + \int_0^t \left\{\sum_{k=0}^{n} [Y_k(\tau, y(t, \lambda), \lambda) -\right.$$

$$\left. - Y(\tau, y(t, \lambda)\lambda_0)]\right\} d\tau - \int_0^t \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int_0^\tau [Y_n(t, y(\tau, \lambda), \lambda) - Y_n(t, y(\tau, \lambda), \lambda_0)]\, dt\right\} \times$$

$$\times Y(\tau, y(\tau, \lambda), \lambda)\, d\tau, \tag{2.9}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots l$. Рассмотрение (2.9) с учетом теоремы п. 1 приводит к следующему результату.

Следствие теоремы п. 1. Пусть $Y_k(t, y, \lambda)$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, l$ удовлетворяют условиям (2.2) и (2.3) и, кроме того, $Y_{l+1}(t, y, \lambda) + \sum_{k=0}^{l} Y_k(t, y, \lambda_0)$ как функция $X(t, y, \lambda)$, а $\int_0^t \left\{\sum_{k=0}^{l} [Y_k(t, y, \lambda) - Y_k(t, y, \lambda_0)]\right\} dt$ как функция $\Phi(t, y, \lambda)$ удовлетворяют условиям 1) — 4) и (1.2) Тогда $\lim_{\lambda \to \lambda_0} y(t, \lambda) = y(t, \lambda_0)$ равномерно по t, $t \in [0, T]$, причем $y(t, \lambda_0)$ — решение уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{k=0}^{l+1} Y_k(t, y, \lambda_0).$$

Из следствия ясно, что $y(t, \lambda_0)$ определяется не из (3) в случаях, когда какое-либо из $Y_k(t, y, \lambda_0)$ отлично от нуля. В частности, это может иметь место, когда

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_0^t \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int_0^t [Y(t, y, \lambda) - Y(t, y, \lambda_0)]\, dt\right\} \cdot Y(t, y, \lambda)\, dt \neq 0 \tag{2.10}$$

3. *а) Автоколебания под действием мгновенных импульсов.* Задача изучения колебаний под действием мгновенных импульсов, возбуждаемых при прохождении системы через фиксированное положение, может быть сведена в случае системы с одной степенью свободы к изучению уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon\left[f\left(x_0, \frac{dx}{dt}\right)\delta(x - x_0) + f_1\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\right], \tag{3.1}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\dfrac{f\left(x_0, \frac{dx}{dt}\right)}{\left|\frac{dx}{dt}\right|}$ — закон, определяющий увеличение скорости в момент действия мгновенного импульса, ε — параметр.

При малых значениях параметра ε в [5] было предложено искать решения уравнения (3.1) методом усреднения Крылова — Боголюбова [4]. Преобразование (3.1) к стандартному виду привело [5] к уравнениям, которые в общем случае можно записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon\left[\sum_{k=1}^{\infty} \cos k(t - \varphi(y)) + g(t, y)\right], \tag{3.2}$$

где $y \in E_m$, $g(t, y)$ — периодическая по t функция, причем под решением уравнения (3.2) понимается функция $y(t) = \lim\limits_{n\to\infty} y(t, n)$, где $y(t, n)$ — решение уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon\left[\sum_{k=1}^{n} \cos k(t - \varphi(y)) + g(t, y)\right]. \tag{3.3}$$

Результаты предыдущих пунктов позволяют обосновать применение метода усреднения к уравнениям вида (3.3) в случае, когда $n = n(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \infty$. Именно, пусть

$$\varepsilon = \frac{1}{N}, \quad N = [N^{\alpha}], \qquad \tau = Nt,$$

где $0 < a < 1$, $[N^{\alpha}]$ — целая часть числа $N^{\alpha} > 0$. Запишем (3.3) в виде

$$\frac{dy}{d\tau} = \sum_{k=1}^{[N^{\alpha}]} \cos k\{N\tau - \varphi(y)\} + g(N\tau, y). \tag{3.4}$$

Имеет место утверждение: при $N \to \infty$ решения уравнения (3.4) для $\tau \in [0, T]$ и $\alpha < \frac{1}{3}$ равномерно сходятся к решениям уравнения

$$\frac{dy}{dt} = g_0(y), \tag{3.5}$$

где $g_0(y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t, y)\,dt$, а 2π — период функции $g(t, y)$.

Действительно, переход от (3.4) к уравнению вида (2.6) дает

$$y(\tau, N) = y(0, N) + \int\limits_0^{\tau} g_0(y(\tau, N))\,d\tau + \sum_{k=0}^{[N^{\alpha}]} \frac{\sin k\{N\tau - \varphi(y(\tau, N))\}}{kN} +$$

$$+ \frac{\sin k\varphi(y(\tau, N))}{kN} + \frac{1}{N}\int\limits_0^{N\tau} \{g(t, y(\tau, N)) - g_0(y(\tau, N))\}\,dt -$$

$$- \int\limits_0^{\tau} \sum_{k=1}^{[N^{\alpha}]} \frac{-\cos k\{Nt - \varphi(y(t, N))\} + \cos k\varphi(y(t, N))}{N} \cdot \varphi'_y(y(t, N))\,dt +$$

$$+\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\int\limits_0^{N\tau}[g(t, y(\tau, N))-g_0(y(\tau, N))]\,dt\right\}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{[N^\alpha]}\cos k[N\tau-\varphi(y(\tau, N))]+\right.$$

$$\left.+g(N\tau, y(\tau, N))\right\}d\tau. \tag{3.6}$$

Применение к (3.6) теоремы п. 1 оказывается возможным при выполнении неравенства

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\sum_{k=1}^{[N^\alpha]}\frac{-\cos k[N\tau-\varphi(y)]+\cos k\varphi(y)}{N}\varphi_y'(y)\right]\cdot\left[\sum_{k=1}^{[N^\alpha]}\cos k[N\tau-\varphi(y)]\right]\right\}\leqq M.$$

Последнее же имеет место при $\alpha<\frac{1}{3}$ и при соответствующих предположениях о дифференцируемости функций $\varphi(y)$ и $g(t, y)$ по y, причем при $\alpha<\frac{1}{3}$ предельным уравнением к (3.6) является

$$\frac{dy}{d\varepsilon}=g_0(y)$$

Таким образом, утверждение, сформулированное выше, доказано.

б) Колебания систем под действием высокочастотных периодических возмущений. Общий вид рассматриваемых уравнений —

$$\frac{dy}{dt}=f(\nu t, y, \nu), \tag{3.7}$$

где ν — большой параметр, $f(\tau, y, \nu)$ — вещественная функция, заданная рядом

$$f(\tau, y, \nu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k(y, \nu)\,e^{ik\nu t},$$

$$f_k(y, \nu)=O(\nu^\alpha), \qquad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{3.8}$$

$$\alpha<1.$$

Переход к интегральному уравнению вида (2.6) при соответствующих предположениях относительно дифференцируемости функции $f(\nu t, y, \nu)$ по y дает

$$y(t, \nu)=y(0, \nu)+\int\limits_0^t f_0(y(\tau, \nu), \nu)\,d\tau+\sum_{k\neq 0}\frac{f_k(y(t, \nu), \nu)}{ik\nu}e^{ik\nu t}-$$

$$-\int\limits_0^t\left[\sum_{k\neq 0}\frac{f_{ky}'(y(t, \nu), \nu)}{ik\nu}\cdot e^{ik\nu t}\right]\cdot f(\nu t, y(t, \nu), \nu)\,dt. \tag{3.9}$$

Откуда, если наряду с (3.8) имеет место

$$f_{ky}'(y, \nu)=O(\nu^\alpha), \qquad f_{ky^2}''(y, \nu)=O(\nu^\alpha), \tag{3.10}$$

то при $\alpha\leqq\frac{1}{2}$ к (3.9) применима теорема п. 1, утверждающая, что для достаточно большого ν решения уравнения (3.7) на интервале $[0, T]$ меньше чем на $\varepsilon > 0$ отличаются от функции $y_0(t)$, определяемой из уравнений

$$\frac{dy_0}{dt} = f_0(y, \nu), \qquad \alpha < \frac{1}{2}, \tag{3.11}$$

$$\frac{dy_0}{dt} = f_0(y, \nu) + f_1^0(y), \qquad \alpha = \frac{1}{2}, \tag{3.12}$$

где

$$f_1^0(y) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k\neq 0} \frac{f'_{ky}(y, \nu)}{ik\nu} e^{ik\tau} \cdot f(\tau, y, \nu)\, d\tau. \tag{3.13}$$

Если $\alpha \leqq \frac{l}{l+1}$, $l = 2, 3, \ldots$, то переход к уравнениям (2.9) с $n = l$ позволяет при достаточно большом ν и t из интервала $[0, T)$ доказать неравенство $|y(t, \nu) - y_0(t)| < \varepsilon$, в котором $y_0(t)$ определяется из уравнений

$$\frac{dy_0}{dt} = \sum_{i=0}^{l-1} f_i^0(y, \nu) \qquad \text{для} \qquad \alpha < \frac{l}{l+1}, \tag{3.14}$$

$$\frac{dy_0}{dt} = f_l^0(y) + \sum_{i=1}^{l-1} f_i^0(y, \nu) \qquad \text{для} \qquad \alpha = \frac{l}{l+1}; \tag{3.14'}$$

$$f_i^0(y, \nu) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_0^{\tau} \frac{f_{i-1}(t, y, \nu) - f_{i-1}^0(y, \nu)}{\nu} dt \right\} f(\tau, y, \nu)\, d\tau,$$

$i = 1, 2, \ldots, l$;

$f_i(\nu t, y, \nu)$ задаются формулами (2.8).

В заключение статьи рассмотрим пример [3]

$$\frac{dy}{dt} = y\nu^{1-\alpha} \cos \nu t + \nu^{1-\beta} \sin \nu t, \tag{3.15}$$

$$y(0, \nu) = 0,$$

где ν — большой параметр, $0 < \alpha \leqq 1$, $0 < \beta \leqq 1$, $\alpha + \beta \geq 1$. Как указано в [3], существующие теоремы о равномерной сходимости решений дифференциальных уравнений от параметра позволяют доказать предельное равенство $\lim_{\nu\to\infty} y(t, \nu) = 0$ для $t \in [0, T]$ вплоть до значений $\alpha > \frac{1}{2}$, $\alpha + \beta > 1$.

Переход к уравнениям (2.9) решает вопрос равномерной сходимости $y(t, \nu)$ к

$$y_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad \alpha + \beta > 1, \\ -\frac{t}{2} & \text{для} \quad \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

при $\nu \to \infty$ полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Kurzweil, Z. Vorel, О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра, Czechoslovak Mathematical Journal, 7 (82), 4 (1957).

2. М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, О принципе усреднения в нелинейной механике, Успехи математических наук, т. 10, № 3, 1955, 147—152.
3. J. Kurzweil, Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, Czechoslovak Mathematical Journal, 7 (82), 3 (1957).
4. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
5. А. М. Самойленко, Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами, в автоколебательных системах 2-го порядка с малым параметром, УМЖ, т. XIII, № 3, 1961.

Поступила 4.VI 1961 г.
Киев

On a case of continuous dependence of the solutions of differential equations on the parameter

A. M. Samoilenko

Summary

A theorem is proved on the continuous dependence on the parameter of solutions of the integral equation (1.1). It is used for the investigation of the dependence on the parameter of the solution of a differential equation in respect to which the right side is continuous in the integral sense, and for finding the limiting function to the solutions.