# О корреляционных функциях векторных процессов, удовлетворяющих некоторым линейным дифференциальным уравнениям

*А. Я. Дороговцев*

В заметке приводятся некоторые теоремы о свойствах векторного случайного процесса $\vec{x}(t)$ ($\vec{a}$ обозначает вектор-столбец с $s$ элементами), удовлетворяющего линейному дифференциальному уравнению

$$L_t[\vec{x}(t)] = K_t[\vec{\xi}'(t)], \tag{1}$$

где

$$L_t[\vec{x}] = \sum_{k=0}^{n} A_k(t) \frac{d^k\vec{x}}{dt^k}, \quad K_t[\vec{x}] = \sum_{k=0}^{m} B_k(t) \frac{d^k\vec{x}}{dt^k}, \quad n > m,$$

коэффициенты $A_k(t)$ и $B_i(t)$ — квадратные матрицы $s$-го порядка, причем элементы матрицы $A_k(t)$ имеют $n+k$ производных, элементы матрицы $B_i(t)$ — $m+i$ производных ($k = 0, 1, \ldots, n$; $i = 0, 1, \ldots, m$) и $\det A_n(t) \neq 0$, $\det B_n(t) \neq 0$ для всех $t$; $\vec{\xi}(t)$ — векторный процесс с ортогональными приращениями: $Md\vec{\xi}(t) = 0$, $M\{d\vec{\xi}(t)\cdot(d\vec{\xi}(\tau))^*\} = \begin{cases} Edt, & t=\tau \\ 0, & t\neq\tau \end{cases}$, $c^* = \|c_{ik}\|^* = \|\bar{c}_{ki}\|$, $E$ — единичная матрица.

Процесс $\vec{\xi}(t)$ не имеет производной и уравнение (1) понимается в обобщенном смысле.

Пусть

$$L_t^*[\vec{u}] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (A_k^*(t)\vec{u})^{(k)}, \quad K_t^*[\vec{u}] = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (B_k^*(t)\vec{u})^{(k)}$$

— дифференциальные выражения, сопряженные $L_t$ и $K_t$ соответственно. Обозначим через $K_{a,b}^n$ совокупность вектор-функций $\vec{u}(t)$, имеющих $n$ производных в $[a, b]$ и обращающихся в 0 в точках $t = a$, $t = b$ вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно.

Будем говорить, что процесс $\vec{x}(t)$ удовлетворяет уравнению (1), если для любых $-\infty < a < b < +\infty$ и $\vec{u}(t) \in K_{a,b}^n$ с вероятностью 1 имеет место равенство

$$\int_a^b (\vec{x}(t), L_t^*[\vec{u}(t)])\, dt = \int_a^b (d\vec{\xi}(t), K_t^*[\vec{u}(t)]).$$

Интеграл, фигурирующий в правой части этого равенства, понимается как стохастический интеграл [1], а $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}^* \cdot \vec{b}$ — скалярное произведение векторов.

Процесс $\vec{x}(t)$ можно рассматривать как результат воздействия «белого шума» $\vec{\xi}'(t)$ на линейную систему $\Sigma$, определяемую уравнением (1) с переменными коэффициентами.

Предположим, что дифференциальные выражения $L_t$ и $K_t$ удовлетворяют следующему условию:

а) элементы матрицы $K_t^*[z(t)]$ интегрируемы с квадратом в области $-\infty, t$ для всякого $t$ и любого решения-матрицы $z(t)$ однородного уравнения $L_t^*[z] = 0$.

Определим функцию-матрицу $R(t, \tau)$ как единственное решение (по $\tau$) уравнения

$$L_\tau^*[R(t, \tau)] = 0$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^k R(t, \tau)}{\partial \tau^k}\right|_{\tau=t} = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, 2, \ldots, n-2, \\ (-1)^{n-1} \cdot (A_n^{-1}(t))^*, & k = n-1, \end{cases}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Случайный процесс*

$$\vec{x}(t) = \int_{-\infty}^{t} (K_\tau^*[R(t, \tau)])^* \, d\vec{\xi}(\tau) \tag{2}$$

*с вероятностью 1 является решением уравнения (1) и имеет $n-m-1$ производных, которые являются обычными случайными процессами. Любое другое решение уравнения (1) с вероятностью 1 имеет вид*

$$\vec{y}(t) = \vec{x}(t) + u_1(t) I_1 + u_2(t) I_2 + \ldots + u_n(t) I_n,$$

*где $u_i(t)$ — линейно независимые матрицы-решения однородного уравнения $L_t[u] = 0$, а $I_i$ — случайные вектор-столбцы.*

Случайный процесс $\vec{x}(t)$, определяемый равенством (2), соответствует установившемуся режиму работы системы $\Sigma$, существование которого обеспечивается условием а).

Теорема 2. *При $t \neq \tau$ корреляционная функция-матрица процесса $\vec{x}(t) r(t, \tau) = M\{\vec{x}(t) \vec{x}^*(\tau)\}$ непрерывна и имеет $2n$ непрерывных производных по $t$. Функция $r(t, \tau)$ и ее производные до порядка $2n-2m-2$ включительно непрерывны по $t$ (включая $t = \tau$). Производная $r(t, \tau)$ по $t$ порядка $2n-2m-1$ разрывна в точке $t = \tau$, и $t = \tau + \varepsilon$*

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[ \frac{\partial^{2n-2m-1} r(t, \tau)}{\partial t^{2n-2m-1}} \right] \Bigg|_{t=\tau-\varepsilon}^{t=\tau+\varepsilon} = (-1)^{n-m} A_n^{-1}(\tau) B_m(\tau) B_m^*(\tau) (A_n^{-1}(\tau))^*. \tag{3}$$

Аналогично, смешанные производные $\frac{\partial^{\nu+\lambda} r(t, \tau)}{\partial t^\nu \partial \tau^\lambda}$ непрерывны при $\nu + \lambda \leqslant 2n - 2m - 2$ и разрывны при $\nu + \lambda = 2n - 2m - 1$ при $t = \tau$.

Предположим, что кроме условия а) выполняются следующие требования:

б) $B_k(t)$ имеют $m + n + k$ производных $(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$;

в) при $2m < n$ выражение $K_t K_t^*$ коммутирует с $L_t$; при $2m \geqq n$ дифференциальные выражения $L_t$ и $K_t$ являются полиномами с постоянными коэффициентами от некоторого дифференциального выражения

$$l_t = \sum_{k=0}^{r} a_k(t) \frac{d^k[\cdot]}{dt^k};$$

$$L_t = \sum_{k=1}^{n/r} \gamma_k l_t^k, \; K_t = \sum_{k=1}^{m/r} \gamma'_k l_t^k,$$

где $\gamma_k$, $\gamma'_k$ — постоянные числа, $a_k(t)$ — квадратные матрицы $s$-го порядка и $l_t$ коммутирует со своим сопряженным выражением $l_t^*$.

При этих условиях справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Корреляционная матрица $r(t, \tau)$ случайного процесса $\vec{x}(t)$ удовлетворяет уравнению*

$$L_t^*[L_t[r(t,\tau)]] = K_t[K_t^*[\Delta(t-\tau)]], \; \Delta(t-\tau) = E\delta(t-\tau). \tag{4}$$

*Это означает, что*

$$\int_a^b r^*(t,\tau) L_t^*[L_t[u(t)]]\, dt = \begin{cases} K_\tau[K_\tau^*[u(\tau)]], & a < \tau < b, \\ 0, & \tau < a \text{ или } \tau > b \end{cases}$$

*для любых $-\infty < a < b < +\infty$ и матрицы $u(t) \in K_{a,b}^{2n}$.*

Условия, при которых получена теорема 3, по-видимому, далеки от необходимых.

Теоремы 1, 2 и 3 являются обобщением хорошо известных фактов для одномерных стационарных процессов [1] и некоторых нестационарных, полученных в [2, 3].

При $m = 0$ из теорем 2 и 3 следует, что корреляционная матрица $r(t, \tau)$ является некоторой матрицей Грина дифференциального выражения $L_t^* L_t$. При $m > 0$ также имеется связь $r(t, \tau)$ с матрицей Грина выражения $L_t^* L_t$.

Лемма. *Пусть $G(t, \tau)$ — некоторая матрица-функция Грина дифференциального выражения $L_t^* L_t$ на $(a, b)$. Матрица-функция $(K_\tau[K_\tau^*[G^*(t\tau)]])^*$ является решением уравнения (4) по $t$ для $t \in [a, b]$ в смысле, указанном в теореме 3.*

Из этой леммы и теоремы 3 следует теорема.

Теорема 4. *При $t, \tau \in [a, b]$ корреляционная матрица-функция $r(t, \tau)$, для которой справедлива теорема 3, может быть представлена в виде*

$$r(t,\tau) = (K_\tau[K_\tau^*[G^*(t,\tau)]])^* + \sum_{i=1}^{2n} u_i(t) c_i(\tau), \tag{5}$$

*где $u_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ — фундаментальная система решений-матриц однородного уравнения $L_t^* L_t[u] = 0$, а $c_i(\tau)$ — некоторые матрицы, не зависящие от $t$.*

Для доказательства теоремы 4 нужно использовать тот факт, что в некотором классе решений все решения однородного уравнения $L_t^*[L_t[u]] = 0$ с гладкими коэффициентами являются обычными, $2n$ раз дифференцируемыми.

Соотношение (5) может служить основой решения интегральных уравнений, к которым приводят некоторые задачи линейной экстраполяции для процесса $\vec{x}(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Дуб, Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956.
2. C. L. Dolph, M. A. Woodbury, Trans. Amer. Math. Soc., 72, 3, 1952, 519.
3. А. Я. Дороговцев, Доп. АН УССР, т. 8, 1962.

Поступила 2.II 1962 г.
Киев

# Полугруппы с конденсаторами

*В. П. Заровный*

Полугруппа $P$ [1] называется полугруппой с конденсаторами, если имеется такое собственное подмножество $K \subset P$, что для любых $p, q \in P$ имеет место включение $pq \in K$, или, иными словами, если $P^2 \subset K$; подмножество $K$ называется конденсатором полугруппы $P$; подмножество $P - K$ называется дополнительным к $K$ антиконденсатором. Пересечение всех конденсаторов полугруппы $P$ назовем ее главным конденсатором, а дополнительный к нему антиконденсатор — главным антиконденсатором полугруппы. Назовем элемент $p \in P$ разложимым в $P$, если имеются такие $q, r \in P$, что $p = qr$; в противном случае $p$ называется неразложимым в $P$.

Предложение 1. *Главный конденсатор полугруппы совпадает с множеством всех разложимых в ней элементов.*

Доказательство. Если $p$ разложим в $P$, то имеется запись $p = qr$, $q, r \in P$, а так как $qr \in K_0$, где $K_0$ — главный конденсатор, то $p \in K_0$. Обратно, пусть $p \in K_0$. Допустим, что $p$ неразложим. Рассмотрим множество $P - p$. Оно не содержит $p$ и является в $P$ конденсатором, так как для любых $q, r \in P$ имеем $qr \neq p$, т. е. $qr \in P - p$. Таким образом, множество, состоящее из одного $p$, является антиконденсатором. Но очевидно, что главный антиконденсатор $A_0$ является и наибольшим антиконденсатором, так что $p \in A_0$. Но по условию $p \in K_0$, и $A_0 \cap K_0$ пусто по определению. Полученное противоречие доказывает предложение.

Нетрудно построить примеры полугрупп с конденсаторами. Так, если $A$ и $B$ — группы, то, определив во множестве $A \times B$ операцию $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, e_B)$, где $e_B$ — единица группы $B$ и $ab$ — произведение в группе $A$, получим, как легко видеть, полугруппу с конденсаторами, главный конденсатор которой состоит из всех элементов вида $(a, e_B)$.

Никакая полугруппа с внутренней единицей не является полугруппой с конденсаторами, так как она не имеет конденсаторов, отличных от нее самой.

Теорема. *Полугруппа, главный конденсатор которой обладает единицей, либо является прямым произведением своего главного конденсатора на полугруппу с одночленным конденсатором, либо получается из такого прямого произведения удалением некоторого собственного подмножества ее главного антиконденсатора.*

Доказательство. Пусть $k$ — произвольный фиксированный элемент полугруппы $P$. Будем считать элемент $a$ эквивалентным элементу $b$ относительно $k$ и писать $a \sim b$, если имеет место равенство $ak = bk$.

Очевидно, что соотношение $\sim$ обладает свойствами симметрии, рефлексивности и транзитивности, поскольку эти свойства присущи соотношению равенства элементов полугруппы. Поэтому полугруппа $P$ распадается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов, или, короче, на классы эквивалентности по $k$. Дальше будет нужна следующая лемма.

Лемма. *Если $P$ — полугруппа с конденсаторами, а $k$ — единица ее главного конденсатора, то*