ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Дуб, Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956.
2. C. L. Dolph, M. A. Woodbury, Trans. Amer. Math. Soc., 72, 3, 1952, 519.
3. А. Я. Дороговцев, Доп. АН УССР, т. 8, 1962.

Поступила 2.II 1962 г.
Киев

Полугруппы с конденсаторами

В. П. Заровный

Полугруппа P [1] называется полугруппой с конденсаторами, если имеется такое собственное подмножество $K \subset P$, что для любых $p, q \in P$ имеет место включение $pq \in K$, или, иными словами, если $P^2 \subset K$; подмножество K называется конденсатором полугруппы P; подмножество $P - K$ называется дополнительным к K антиконденсатором. Пересечение всех конденсаторов полугруппы P назовем ее главным конденсатором, а дополнительный к нему антиконденсатор — главным антиконденсатором полугруппы. Назовем элемент $p \in P$ разложимым в P, если имеются такие $q, r \in P$, что $p = qr$; в противном случае p называется неразложимым в P.

Предложение 1. *Главный конденсатор полугруппы совпадает с множеством всех разложимых в ней элементов.*

Доказательство. Если p разложим в P, то имеется запись $p = qr$, $q, r \in P$, а так как $qr \in K_0$, где K_0 — главный конденсатор, то $p \in K_0$. Обратно, пусть $p \in K_0$. Допустим, что p неразложим. Рассмотрим множество $P - p$. Оно не содержит p и является в P конденсатором, так как для любых $q, r \in P$ имеем $qr \neq p$, т. е. $qr \in P - p$. Таким образом, множество, состоящее из одного p, является антиконденсатором. Но очевидно, что главный антиконденсатор A_0 является и наибольшим антиконденсатотором, так что $p \in A_0$. Но по условию $p \in K_0$, и $A_0 \cap K_0$ пусто по определению. Полученное противоречие доказывает предложение.

Нетрудно построить примеры полугрупп с конденсаторами. Так, если A и B — группы, то, определив во множестве $A \times B$ операцию $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, e_B)$, где e_B — единица группы B и ab — произведение в группе A, получим, как легко видеть, полугруппу с конденсаторами, главный конденсатор которой состоит из всех элементов вида (a, e_B).

Никакая полугруппа с внутренней единицей не является полугруппой с конденсаторами, так как она не имеет конденсаторов, отличных от нее самой.

Теорема. *Полугруппа, главный конденсатор которой обладает единицей, либо является прямым произведением своего главного конденсатора на полугруппу с одночленным конденсатором, либо получается из такого прямого произведения удалением некоторого собственного подмножества ее главного антиконденсатора.*

Доказательство. Пусть k — произвольный фиксированный элемент полугруппы P. Будем считать элемент a эквивалентным элементу b относительно k и писать $a \sim b$, если имеет место равенство $ak = bk$.

Очевидно, что соотношение $\sim$ обладает свойствами симметрии, рефлексивности и транзитивности, поскольку эти свойства присущи соотношению равенства элементов полугруппы. Поэтому полугруппа P распадается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов, или, короче, на классы эквивалентности по k. Дальше будет нужна следующая лемма.

Лемма. *Если P — полугруппа с конденсаторами, а k — единица ее главного конденсатора, то*

1) разбиение полугруппы на классы эквивалентности по k правильно (т. е. произведение любых двух классов эквивалентности по k — класс эквивалентности по k);

2) главный конденсатор имеет в пересечении с каждым классом эквивалентности в точности один элемент.

Доказательство. 1) Докажем прежде всего, что единица k главного конденсатора K_0 перестановочна с любым элементом полугруппы. В самом деле, в таком случае при любом $a \in P$ имеем $ka = (ka)k$, так как $ka \in K_0$ и k — единица в K_0. В силу ассоциативности, $(ka)k = k(ak)$. Кроме того, очевидно $k(ak) = ak$. В итоге имеем равенство $ka = ak$.

Рассмотрим теперь равенства $ak = a'k$, $bk = b'k$, данные нам эквивалентностями $a \sim a'$, $b \sim b'$. Почленно перемножив их, получаем $(akb)k = (a'kb')k$.

Принимая во внимание, что k — единица главного конденсатора K_0 и akb, $a'kb' \in K_0$, имеем $(akb)k = akb$, $(a'kb')k = a'kb'$, откуда $akb = a'kb'$. В силу перестановочности k с b и b', имеем $(ab)k = (a'b')k$, т. е. $ab \sim a'b'$, даже $ab = a'b'$.

2) Рассмотрим любой класс L эквивалентности по k. Он определяется любым своим элементом a. Элемент ak принадлежит главному конденсатору K_0. С другой стороны, поскольку k — единица в этом последнем, то $(ak)k = ak$, т. е. $ak \sim a$, $ak \in L$.

Итак, $ak \in L \cap K_0$, чем существование пересечения с каждым классом эквивалентности доказано.

Допустим, что $k' = k''$ и $k', k'' \in L \cap K_0$. Так как $k', k'' \in L$, то $k' \sim k''$, т. е. $k'k = k''k$. Но так как $k', k'' \in K_0$ и k — единица в K_0, то даже $k'k = k'$, $k''k = k''$, откуда $k' = k''$, чем и единственность элемента в пересечении $L \cap K_0$ доказана.

Замечание. В сущности доказано следующее более общее предложение.

Предложение 2. *Если k — единица какого-нибудь идеала полугруппы, то*

1) разбиение полугруппы на классы эквивалентности по k правильно;

2) пересечение этого идеала с любым классом эквивалентности по k состоит в точности из одного элемента.

Пусть главный конденсатор K_0 полугруппы P обладает единицей k. Произведем разбиение элементов полугруппы на классы эквивалентности по k и обозначим через L_0 класс, содержащий k; L_0 является полугруппой с одночленным конденсатором k. Действительно, если $b_1, b_2 \in L_0$, то учитывая (лемма, 1), что разбиение на классы правильно, имеем что b_1b_2 и $kk = k$ принадлежат одному классу, т. е. $b_1b_2 \in L_0$, так что L_0 — полугруппа. С другой стороны, $b_1b_2 \in K_0$ по определению K_0 и $k \in K_0$ по условию. А по условию 2) леммы каждый класс в пересечении с K_0 имеет единственный элемент. Так b_1b_2, $k \in K_0 \cap L_0$, то $b_1b_2 = k$, так что k является одночленным конденсатором полугруппы L_0.

Обозначим прямое произведение $K_0 \times L_0$ через P_0.

Возможны два случая: классы эквивалентности в P по k либо равномощны, либо нет. Рассмотрим первый из них и покажем, что в таком случае P_0 изоморфна с P. Заметим, что элементами полугруппы P_0 являются пары вида (a, b), где $a \in K_0$, $b \in L_0$. Каждому элементу $p \in P$ соотнесем пару (a, b) по правилу $a = K_0 \cap L_p$, где L_p — класс эквивалентности по k, содержащий p; b — элемент из L_0, соответствующий элементу p из L_p в некотором наперед для каждого L_p зафиксированном взаимно однозначном соответствии между элементами L_0 и L_p (возможном из-за равномощности классов эквивалентности по k в P в рассматриваемом случае). Соответствие между элементами L_0 и L_p подчиним одному лишь требованию, чтобы для каждого L_p элементу $K_0 \cap L_p$ отвечал элемент $K_0 \cap L_0$, т. е.

k; тогда элементам из K_0 в P_0 будут отвечать пары вида (a, k). Полученное соответствие между элементами полугрупп P и P_0 взаимно однозначно, что следует из того, что каждый элемент p и P принадлежит точно одному классу эквивалентности по k и каждый класс (лемма 2)) в пересечении с K_0 имеет точно один элемент. Это соответствие — изоморфизм, так как для любых $p_1, p_2 \in P$ из $p_1 \longleftrightarrow (a_1, b_1)$, $p_2 \longleftrightarrow (a_2, b_2)$ следует $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2) = (a_1a_2, k) \longleftrightarrow a_1a_2 = p_1p_2$, т. е. $p_1p_2 \longleftrightarrow (a_1, b_1)(a_2, b_2)$.

Итак, $P \cong P_0$.

Остается рассмотреть случай, когда классы эквивалентности по k в P неравномощны. Дополним множество L_0 произвольными новыми элементами так, чтобы полученное новое множество L'_0 имело мощность наибольшего класса эквивалентности по k. В L'_0 доопределим операцию так, чтобы для любых $b_1, b_2 \in L'_0$ было $b_1b_2 = k$. Обозначим через P'_0 прямое произведение $K_0 \times L'_0$. Полугруппа P'_0 будет иметь собственный главный конденсатор, изоморфный с K_0. Действительно, множество пар вида (a, k), где $a \in K_0$ — собственное подмножество множества всех пар вида (a, b), где $a \in K_0$, $b \in L'_0$, так как в противном случае L'_0 состояло бы из одного k, и все классы эквивалентности, содержа по одному элементу [меньше их в классе быть не может согласно лемме (2)], были равномощными. Множество пар вида (a, k) образуют конденсатор в P'_0, так как для любых $a_1, a_2 \in K_0$, $b_1, b_2 \in L'_0$ по определению L'_0

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2) = (a_1a_2, k).$$

Этот конденсатор главный, так как содержит единицу (k, k) и потому не может иметь собственных конденсаторов.

Между классами эквивалентности L по k в P, с одной стороны, и классами эквивалентности L' по (k, k) в P'_0, с другой, существует взаимно однозначное соответствие (даже изоморфизм) $L_a \longleftrightarrow L'_{(a,k)}$, где индекс означает элемент главного конденсатора соответствующей полугруппы, содержащийся в обозначаемом классе. При этом для каждого $a \in K_0$ мощность L_a не превышает по построению P'_0 мощности $L'_{(a,k)}$. Удалим из $L'_{(a,k)}$ столько отличных от (a, k) любых элементов, чтобы уравнять мощности $L'_{(a,k)}$ и L_a. Для каждого $a \in K_0$ зафиксируем взаимно однозначное соответствие между элементами L_a и $L'_{(a,k)}$, при котором $a \longleftrightarrow (a, k)$. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между элементами полугруппы P и множества P''_0, полученного из P'_0 указанным выше удалением элементов главного антиконденсатора последней. Это соответствие — изоморфизм, что доказывается так же, как и выше и при доказательстве $P \simeq P_0$.

Итак, $P \cong P''_0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1 Е. С. Ляпин., Полугруппы, Физматгиз, М., 1960.

Поступила 11.VI 1960 г.
Станислав

Об одном итерационном методе решения полной проблемы собственных чисел

В. Г. Корепов

При решении полной проблемы собственных чисел и собственных векторов является важным то, чтобы погрешность в определении одних собственных чисел не влияла на погрешность в определении других собственных чисел, а также собственных векторов [1, 2, 3].

Пусть A — симметричная матрица, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — ее собственные числа, занумерованные в порядке их возрастания.

Для построения приближенного метода нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы A воспользуемся преобразованием, примененным ранее в работе Г. Н. Положего [4],

$$P = E - \frac{1}{\sigma}(A - \mu E)^2, \tag{1}$$

где E — единичная матрица, μ — числовой параметр, σ — любое число, удовлетворяющее неравенству

$$\sigma \geqq (\|A\| + |\mu|)^2. \tag{2}$$

Матрица P, определенная равенством (1), будет иметь собственные числа

$$\nu_i = 1 - \frac{1}{\sigma}(\lambda_i - \mu)^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

и те же самые собственные векторы, что и матрица A.

Как видно из (3) $0 < \nu_i \leqq 1$. В зависимости от выбора параметра μ наибольшим среди $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ будет или ν_1 или ν_2 и т. д. Выберем $\mu \geqslant \|A\|$. Тогда наибольшим среди $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ будет ν_n. Нахождение ν_n осуществляем итерационным способом

$$\nu_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(P^n r, P^n r)}{(P^{n-1} r, P^n r)}, \tag{4}$$

где r — некоторый начальный вектор. Определив ν_n, из равенства (3), находим λ_n. Соответствующий λ_n собственный вектор X_n матрицы A находим при помощи итерационного процесса

$$X_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P^{2n} r}{\sqrt{(P^{2n} r, P^{2n} r)}}. \tag{5}$$

Выбрав параметр μ так, чтобы $\mu \leqslant -\|A\|$ и воспользовавшись теми же формулами (4), (3), (5), найдем наименьшее собственное число λ_1 и соответствующий собственный вектор X_1 матрицы A. Выбирая параметр μ так, чтобы $-\|A\| < \mu < \|A\|$, в результате конечного числа шагов указанного типа найдем все отличные друг от друга собственные числа матрицы A и соответствующие им собственные векторы. При этом, как видно из изложенного, погрешность при определении тех или иных собственных чисел и собственных векторов не зависит от погрешности собственных чисел и собственных векторов, вычисленных ранее.

Отметим, что согласно равенству (3) каждому значению ν_i соответствует два возможных значения λ_i. Вопрос о том, какое из этих значений будет собственным числом матрицы A, решается очень просто за счет проведения того же самого итерационного процесса при измененном значении μ.

Быстрота сходимости итерационных процессов (4) и (5), как легко видеть, зависит от выбора значений μ и σ. Опыт вычислений показывает, что при определении собственных чисел, удовлетворяющих условию — $\|A\| < \lambda_i < \|A\|$ число σ следует брать равным

$$\max[(\mu - \lambda_1)^2, (\mu - \lambda_n)^2].$$

Учитывая, что матрица P всегда положительно определенная, к итерационным процессам по формулам (4), (5) при любых значениях μ и σ можно применять все известные способы ускорения сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, М., 1960.
2. H. Rutishauser, Z. angew. Math. und Phus., 6 . № 5, 1955.
3. F. Bauer, Z. angew. Math. und Phus., 8, № 3, 1957.
4. Г. Н. Положий, Об одном методе решения интегральных уравнений, ДАН СССР, т. 118, № 5, 1958.

Поступила 20.V 1961 г.
Горький