Об одном итерационном методе решения полной проблемы собственных чисел

В. Г. Корепов

При решении полной проблемы собственных чисел и собственных векторов является важным то, чтобы погрешность в определении одних собственных чисел не влияла на погрешность в определении других собственных чисел, а также собственных векторов [1, 2, 3].

Пусть A — симметричная матрица, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — ее собственные числа, занумерованные в порядке их возрастания.

Для построения приближенного метода нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы A воспользуемся преобразованием, примененным ранее в работе Г. Н. Положего [4],

$$P = E - \frac{1}{\sigma}(A - \mu E)^2, \tag{1}$$

где E — единичная матрица, μ — числовой параметр, σ — любое число, удовлетворяющее неравенству

$$\sigma \geqq (\| A \| + |\mu|)^2. \tag{2}$$

Матрица P, определенная равенством (1), будет иметь собственные числа

$$\nu_i = 1 - \frac{1}{\sigma}(\lambda_i - \mu)^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

и те же самые собственные векторы, что и матрица A.

Как видно из (3) $0 < \nu_i \leqq 1$. В зависимости от выбора параметра μ наибольшим среди $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ будет или ν_1 или ν_2 и т. д. Выберем $\mu \geqslant \| A \|$. Тогда наибольшим среди $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ будет ν_n. Нахождение ν_n осуществляем итерационным способом

$$\nu_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(P^n r, P^n r)}{(P^{n-1} r, P^n r)}, \tag{4}$$

где r — некоторый начальный вектор. Определив ν_n, из равенства (3), находим λ_n. Соответствующий λ_n собственный вектор X_n матрицы A находим при помощи итерационного процесса

$$X_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P^{2n} r}{\sqrt{(P^{2n} r, P^{2n} r)}}. \tag{5}$$

Выбрав параметр μ так, чтобы $\mu \leqslant -\| A \|$ и воспользовавшись теми же формулами (4), (3), (5), найдем наименьшее собственное число λ_1 и соответствующий собственный вектор X_1 матрицы A. Выбирая параметр μ так, чтобы $-\| A \| < \mu < \| A \|$, в результате конечного числа шагов указанного типа найдем все отличные друг от друга собственные числа матрицы A и соответствующие им собственные векторы. При этом, как видно из изложенного, погрешность при определении тех или иных собственных чисел и собственных векторов не зависит от погрешности собственных чисел и собственных векторов, вычисленных ранее.

Отметим, что согласно равенству (3) каждому значению ν_i соответствует два возможных значения λ_i. Вопрос о том, какое из этих значений будет собственным числом матрицы A, решается очень просто за счет проведения того же самого итерационного процесса при измененном значении μ.

Быстрота сходимости итерационных процессов (4) и (5), как легко видеть, зависит от выбора значений μ и σ. Опыт вычислений показывает, что при определении собственных чисел, удовлетворяющих условию $-\|A\| < \lambda_i < \|A\|$ число σ следует брать равным

$$\max [(\mu - \lambda_1)^2, (\mu - \lambda_n)^2].$$

Учитывая, что матрица P всегда положительно определенная, к итерационным процессам по формулам (4), (5) при любых значениях μ и σ можно применять все известные способы ускорения сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, М., 1960.
2. H. Rutishauser, Z. angew. Math. und Phus., 6 . № 5, 1955.
3. F. Bauer, Z. angew. Math. und Phus., 8, № 3, 1957.
4. Г. Н. Положий, Об одном методе решения интегральных уравнений, ДАН СССР, т. 118, № 5, 1958.

Поступила 20.V 1961 г.
Горький