О степенях ограниченного диссипативного оператора

В. И. Мацаев, Ю. А. Палант

Мы ставим своей задачей целесообразное определение главного значения степени T^{α} $(0 < \alpha < 1)$ ограниченного диссипативного оператора T и установление ряда свойств этой степени.

Напомним, что линейный ограниченный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, называется *диссипативным*, если $\operatorname{Im}(Tf, f) \geqslant 0$ для любого $f \in \mathfrak{H}$. Более сильным является требование равномерной диссипативности: $\operatorname{Im}(Tf, f) \geqslant \varepsilon (f, f)$ при некотором $\varepsilon > 0$ для всех $f \in \mathfrak{H}$.

1. Определение и непрерывность степени T^{α}

Если спектр ограниченного оператора T, действующего в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, лежит в области $\operatorname{Ext}(0, -i\infty)$ (плоскость с разрезом вдоль отрицательной мнимой полуоси) и не содержит точку $\lambda = 0$, то согласно общей теории функций от операторов [1] степень T^{α} можно определить с помощью интеграла

$$T^{\alpha} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \lambda^{\alpha} R_{\lambda} d\lambda, \tag{1}$$

где C — какой-либо простой контур, лежащий в области $\operatorname{Ext}(0, -i\infty)$ и окружающий спектр оператора T, а $R_{\lambda} = (T - \lambda I)^{-1}$ — резольвента оператора T. Это определение зависит от выбора ветви многозначной функции λ^{α} в области $\operatorname{Ext}(0, -i\infty)$. Мы выберем ту ветвь, которая однозначно определяется условием $\lambda^{\alpha} > 0$ при $\lambda > 0$.

При таком определении степени оператора образуют группу

$$T^{\alpha} T^{\beta} = T^{\alpha+\beta} \qquad (-\infty < \alpha, \beta < \infty). \tag{2}$$

Обозначим через $\mathfrak{C}_{\gamma}$ $(\gamma \geqslant 1)$ класс ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{B}$, имеющих спектр в верхней полуплоскости, с резольвентой, удовлетворяющей оценке

$$|R_{-iy}| \leqslant \frac{\gamma}{y} \qquad (0 < y < \infty). \tag{3}$$

Преобразуем формулу (1), предполагая, что оператор $T \in \mathfrak{C}_\gamma$ и $0 < \alpha < 1$. В качестве контура интегрирования выберем $C_{R,r}$ — контур, состоящий из окружности $|\lambda| = R$, отрезка мнимой оси от $-iR$ до $-ir$, окружности $|\lambda| = r$ и отрезка от $-ir$ до $-iR$. Тогда (1) можно переписать в виде

$$T^\alpha = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R,r}} \lambda^\alpha \left(R_\lambda + \frac{I}{\lambda}\right) d\lambda.$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$, $r \to 0$ и учитывая, что

$$\left| R_\lambda + \frac{I}{\lambda} \right| = O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right) \ (\lambda \to \infty) \ \text{и} \ \int_{|\lambda|=r} \lambda^\alpha \left(R_\lambda + \frac{I}{\lambda}\right) d\lambda \to 0 \, (r \to 0),$$

получаем

$$T^\alpha = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{0} \lambda^\alpha \left(R_\lambda + \frac{I}{\lambda}\right) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{-i\infty} \lambda^\alpha \left(R_\lambda + \frac{I}{\lambda}\right) d\lambda,$$

или

$$T^\alpha = \frac{1}{2\pi} \left(e^{\frac{3\pi i\alpha}{2}} - e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\right) \int_0^\infty y^\alpha \left(R_{-iy} + \frac{I}{-iy}\right) dy \tag{4}$$

Покажем, что правая часть (4) сходится по норме операторов для любого оператора $T \in \mathfrak{C}_\gamma$. Разбивая промежуток интегрирования на две части $(0, \delta)$ и (δ, ∞) и пользуясь оценкой (3) для резольвенты, а также поведением функции $R_\lambda + \frac{I}{\lambda}$ на бесконечности, получаем

$$\int_0^\infty y^\alpha \left| R_{-iy} + \frac{I}{-iy} \right| dy < \infty.$$

После сказанного формула (4) может служить определением степени T^α $(0 < \alpha < 1)$ оператора $T \in \mathfrak{C}_\gamma$.

Теорема 1. *При фиксированном α $(0 < \alpha < 1)$ степень T^α является непрерывной функцией от оператора $T \in \mathfrak{C}_\gamma$. Более того, для двух таких операторов T' и T'' выполняется неравенство*

$$|T'^\alpha - T''^\alpha| \leqslant C(\alpha, \gamma) \, |T' - T''|^\alpha,$$

где

$$C(\alpha, \gamma) = \frac{2^{1-\alpha} \gamma^{1+\alpha} \sin \pi\alpha}{\pi\alpha (1-\alpha)}.$$

Доказательство. Положим $R'_\lambda = (T' - \lambda I)^{-1}$ и $R''_\lambda = (T'' - \lambda I)^{-1}$. Тогда

$$T'^\alpha - T''^\alpha = \frac{1}{2\pi} \left(e^{\frac{3\pi i\alpha}{2}} - e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\right) \int_0^\infty y^\alpha (R'_{-iy} - R''_{-iy}) \, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(e^{\frac{3\pi i\alpha}{2}} - e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\right) \left[\int_0^\delta y^\alpha (R'_{-iy} - R''_{-iy}) \, dy + \int_\delta^\infty y^\alpha R'_{-iy} (T' - T'') R''_{-iy} dy \right],$$

откуда, пользуясь оценкой (3), получаем

$$|T'^{\alpha}-T''^{\alpha}| \leqslant \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left[2\gamma\int_0^{\delta} y^{\alpha-1}dy+\gamma^2|T'-T''|\int_{\delta}^{\infty} y^{\alpha-2}dy\right]=$$

$$=\frac{\gamma\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{2\delta^{\alpha}}{\alpha}+\gamma|T'-T''|\frac{\delta^{\alpha-1}}{1-\alpha}\right).$$

Минимум последнего выражения достигается при $\delta=\frac{\gamma}{2}|T'-T''|$ и совпадает с правой частью (5). Теорема доказана.

Из непрерывности степени T^{α} и (2) легко вывести, что (2) справедливо при $\alpha,\beta>0$, $\alpha+\beta<1$ для любого оператора $T\in\mathfrak{C}_{\gamma}$. В частности, если пространство гильбертово: $\mathfrak{B}=\mathfrak{H}$, то любой ограниченный диссипативный оператор $T\in\mathfrak{C}_1$. Поэтому наше определение степени T^{α} $(0<\alpha<1)$ с помощью интеграла (4) имеет смысл для таких операторов; константа в теореме 1 оказывается для этого случая равной

$$C(\alpha,1)=\frac{2^{1-\alpha}\sin\pi\alpha}{\pi\alpha(1-\alpha)}.$$

Назовем ограниченный оператор A, действующий в $\mathfrak{H}$, псевдоположительным, если $\operatorname{Re}(Af,f)\geqslant 0$ $(f\in\mathfrak{H})$. Рассуждения, аналогичные указанным в начале этого параграфа, приводят к следующему определению главного значения степени A^{α} $(0<\alpha<1)$:

$$A^{\alpha}=-\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^{\infty}x^{\alpha}\left(R_{-x}-\frac{I}{x}\right)dx, \tag{4'}$$

где $R_{\lambda}=(A-\lambda I)^{-1}$ — резольвента оператора A. Заметим, что формулу (4′) легко получить также и из (4), полагая там $T=iA$.

2. Некоторые свойства степени $\mathbf{T}^{\alpha}$

В дальнейшем T всюду будет означать ограниченный диссипативный оператор, действующий в $\mathfrak{H}$.

1°. Значения формы $z=(T^{\alpha}f,f)$ при любом $f\in\mathfrak{H}$ лежат в угле $0\leqslant\arg z\leqslant\pi\alpha$.

Пусть сперва T равномерно диссипативен. Докажем утверждение, эквивалентное 1°: при любом φ $(0\leqslant\varphi<\pi(1-\alpha))$ для всех $f\in\mathfrak{H}$

$$\operatorname{Im}(e^{i\varphi}T^{\alpha}f,f)\geqslant 0.$$

Заметим, что оператор $e^{i\varphi}T^{\alpha}$ можно представить в виде интеграла

$$e^{i\varphi}T^{\alpha}=-\frac{e^{i\varphi}}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{R,r}}\lambda^{\alpha}\left(R_{\lambda}+\frac{I}{\lambda}\right)d\lambda,$$

взятого по контуру $\Gamma_{R,r}$, состоящему из полуокружности $\lambda=Re^{i\psi}$ $(0\leq\psi\leq\pi)$, отрезка $(-R,-r)$, полуокружности $\lambda=re^{i\psi}$ $(\pi\geqslant\psi\geqslant 0)$ и отрезка (r,R) (разумеется, $|R|>|T|$). Так как симметричный контур $\overline{\Gamma}_{R,r}$ не содержит особенностей подынтегральной функции, то

$$-\frac{e^{i\varphi}}{2\pi i}\oint_{\overline{\Gamma}_{R,r}}\lambda^{\alpha}\left(R_{\lambda}+\frac{I}{\lambda}\right)d\lambda=0.$$

Сложив эти два равенства и перейдя к пределу при $R \to \infty$, $r \to 0$, получим

$$e^{i\varphi}T^{\alpha} = \frac{1}{2\pi i}(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) \int_0^{\infty} x^{\alpha}\left(R_x + \frac{I}{x}\right) dx +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}(e^{-i(\varphi+\pi\alpha)} - e^{i(\varphi+\pi\alpha)}) \int_{-\infty}^{0} |x|^{\alpha}\left(R_x + \frac{I}{x}\right) dx =$$

$$= -\frac{\sin\varphi}{\pi} \int_0^{\infty} x^{\alpha}\left(R_x + \frac{I}{x}\right) dx - \frac{\sin(\varphi + \pi\alpha)}{\pi} \int_{-\infty}^{0} |x|^{\alpha}\left(R_x + \frac{I}{x}\right) dx, \quad (5)$$

откуда, используя диссипативность оператора $-R_x$, заключаем, что

$$\operatorname{Im}(e^{i\varphi}T^{\alpha}f, f) = -\frac{\sin\varphi}{\pi} \int_0^{\infty} x^{\alpha} \operatorname{Im}(R_x f, f)\, dx - \frac{\sin(\varphi + \pi\alpha)}{\pi} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{0} |x|^{\alpha} \operatorname{Im}(R_x f, f)\, dx \geqslant 0.$$

Для любого диссипативного оператора T утверждение 1° легко получается с помощью предельного перехода (возможного по теореме 1).

Из свойства 1° получается простым преобразованием

1′. *Значения формы $z = (A^{\alpha}f, f)$ степени A^{α} псевдоположительного оператора A лежат в угле* $-\frac{\pi\alpha}{2} \leqslant \arg z \leqq \frac{\pi\alpha}{2}$.

В частности, если $A = I$ — оператор интегрирования в $\mathfrak{H} = L^2(0, 1)$:

$$If = \int_0^{x} f(s)\, ds,$$

то, пользуясь (4′), находим для A^{α} выражение

$$I^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x} (x - s)^{\alpha - 1} f(s)\, ds,$$

которое совпадает с известной в анализе формулой. Легко видеть, что эрмитовы компоненты $G_{\alpha} = \frac{1}{2}[I^{\alpha} + (I^{\alpha})^*]$ и $H_{\alpha} = \frac{1}{2i}[I^{\alpha} - (I^{\alpha})^*]$ оператора I^{α} суть интегральные операторы, задаваемые равенствами

$$G_{\alpha}f = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^{1} |x - s|^{\alpha - 1} f(s)\, ds$$

и

$$H_{\alpha}f = \frac{1}{2i\Gamma(\alpha)} \int_0^{1} |x - s|^{\alpha - 1} \operatorname{sign}(x - s) f(s)\, ds.$$

Из 1′ вытекает, что $(G_{\alpha}f, f) \geqq 0$ и $|(H_{\alpha}f, f)| \leqq \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2} \cdot (G_{\alpha}f, f)$.

Таким образом, операторы $H_\alpha \pm \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2} G_\alpha$ оказываются положительными; следовательно, ядро

$$K(x, s) = e^{\frac{\pi i\alpha}{2}\operatorname{sign}(x-s)} |x - s|^{\alpha-1}$$

является эрмитово-положительным.

Следствием свойства 1° является

2°. *Спектр оператора* T^α *лежит в угле* $0 \leq \arg z \leq \pi\alpha$.

Покажем теперь, что*

3°. $\mathfrak{R}(T^\alpha - \lambda^\alpha I) = \mathfrak{R}(T - \lambda I)\ (\lambda \neq 0)$ *и* $\overline{\mathfrak{R}(T^\alpha)} = \overline{\mathfrak{R}(T)}$. Так как $\mathfrak{R}(T^\alpha - \lambda^\alpha I) = \mathfrak{R}(T - \lambda I) = \mathfrak{H}(\operatorname{Im}\lambda < 0)$, то первое соотношение остается проверить при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$. Пользуясь формулой (4), получаем

$$T^\alpha - \lambda^\alpha I = \frac{1}{2\pi}\left(e^{\frac{3\pi i\alpha}{2}} - e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\right)\int_0^\infty (T - \lambda I)\, y^\alpha \cdot \frac{1}{\lambda + iy} R_{-iy}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(e^{\frac{3\pi i\alpha}{2}} - e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\right)(T - \lambda I)\int_0^\infty \frac{y^\alpha}{\lambda + iy} R_{-iy}\, dy,$$

откуда $\mathfrak{R}(T^\alpha - \lambda^\alpha I) \subseteq \mathfrak{R}(T - \lambda I)$. С другой стороны, взяв любое целое число $k > \frac{1}{\alpha}$, заключаем отсюда, что

$$\mathfrak{R}(T - \lambda I) = \mathfrak{R}\left(\left((T^\alpha)^{\frac{1}{\alpha k}}\right)^k - \left((\lambda^\alpha)^{\frac{1}{\alpha k}}\right)^k I\right) \subseteq$$

$$\subseteq \mathfrak{R}\left((T^\alpha)^{\frac{1}{\alpha k}} - (\lambda^\alpha)^{\frac{1}{\alpha k}} I\right) \subseteq \mathfrak{R}(T^\alpha - \lambda^\alpha I).$$

Итак, $\mathfrak{R}(T^\alpha - \lambda^\alpha I) = \mathfrak{R}(T - \lambda I)$. Включение $\mathfrak{R}(T^\alpha) \subseteq \overline{\mathfrak{R}(T)}$ следует из того, что

$$T^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\left(e^{\frac{3\pi i\alpha}{2}} - e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\right) T \lim_{\delta\downarrow 0}\int_\delta^\infty y^{\alpha-1} R_{-iy}\, dy.$$

Взяв снова целое $k > \frac{1}{\alpha}$, имеем

$$\mathfrak{R}(T) = \mathfrak{R}\left(\left((T^\alpha)^{\frac{1}{\alpha k}}\right)^k\right) \subseteq \mathfrak{R}\left((T^\alpha)^{\frac{1}{\alpha k}}\right) \subseteq \overline{\mathfrak{R}(T^\alpha)}.$$

4°. *Для любого элемента* $f \in \mathfrak{H}$ *и произвольного* $\lambda \neq 0$ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$

$$q\,|(T - \lambda I) f| \leq |(T^\alpha - \lambda^\alpha I) f| \leq Q\,|(T - \lambda I) f|,$$

где постоянные q *и* Q *не зависят от* f.

Действительно,

$$|(T^\alpha - \lambda^\alpha I) f| \leq \left|\frac{1}{2\pi}\left(e^{\frac{3\pi i\alpha}{2}} - e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\right)\int_0^\infty \frac{y^\alpha}{\lambda + iy} R_{-iy}\, dy\right| |(T - \lambda I) f| =$$

$$= Q\,|(T - \lambda I) f|,$$

* Под $\mathfrak{P}(A)$ мы понимаем область значений оператора A, под $\overline{\mathfrak{P}(A)}$ — замыкание $\mathfrak{P}(A)$.

а с другой стороны, взяв целое $k > \frac{1}{\alpha}$, получаем

$$|(T-\lambda I)f| = \left|\left(\left((T^{\alpha})^{\frac{1}{k\alpha}}\right)^{k} - \left((\lambda^{\alpha})^{\frac{1}{k\alpha}}\right)^{k} I\right) f\right| \leq$$

$$\leq Q_1 \left|\left((T^{\alpha})^{\frac{1}{k\alpha}} - (\lambda^{\alpha})^{\frac{1}{k\alpha}} I\right) f\right| \leq Q_2 |(T^{\alpha}-\lambda^{\alpha} I) f| \; (Q_j = Q_j(T, \lambda, k);\ j = 1, 2).$$

Из доказанных свойств 3° и 4° следует

5°. *Для того чтобы точка* λ $(\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0)$ *принадлежала спектру оператора* T, *необходимо и достаточно, чтобы точка* λ^{α} *принадлежала спектру степени* T^{α}. *Более того, при отображении* $\lambda \to \lambda^{\alpha}$ *точечный спектр переходит в точечный, непрерывный — в непрерывный и остаточный — в остаточный.*

6°. *Элемент* $f \in \mathfrak{H}$ *является собственным (корневым) вектором оператора* T^{α}, *принадлежащим собственному значению* λ^{α} *тогда и только тогда, когда он является и собственным (корневым) вектором оператора* T, *принадлежащим собственному значению* λ.

Совпадение собственных векторов у операторов T^{α} и T следует из 5°; совпадение корневых векторов — из совпадения собственных и коммутации $T^{\alpha} \smile T$.

7°. *Из равномерной диссипативности оператора* T *следует равномерная диссипативность степени* T^{α}.

Пользуясь формулой (5) при $\varphi = 0$ и обозначая $R_x f$ через g_x, получим

$$\operatorname{Im}(T^{\alpha} f, f) = -\frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{0} |x|^{\alpha} \operatorname{Im}(R_x f, f)\, dx =$$

$$= \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{0} |x|^{\alpha} \operatorname{Im}(T g_x, g_x)\, dx \geqq \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{-2|T|} |x|^{\alpha} \operatorname{Im}(T g_x, g_x)\, dx,$$

откуда, учитывая, что $|g_x| > \frac{|f|}{2|x|}$ при $|x| > 2|T|$, получаем

$$\operatorname{Im}(T^{\alpha} f, f) \geqq \frac{\varepsilon \sin \pi\alpha}{4\pi} |f|^2 \int_{-\infty}^{-2|T|} |x|^{\alpha-2} dx = \eta |f|^2, \quad \eta = \eta(\varepsilon, \alpha, T) > 0.$$

Из свойства 3° легко вытекает следующее:

8°. *Для того чтобы оператор* T^{α} *был конечномерным, необходимо и достаточно, чтобы таковым был* T. *При этом* $\mathfrak{R}(T^{\alpha}) = \mathfrak{R}(T)$.

Для дальнейшего рассмотрим, следуя И. Нейману и Р. Шаттену [2], класс $\mathfrak{S}_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ вполне непрерывных операторов A, для которых сходится ряд $\sum_j s_j^p(A)$, где $s_j(A)$ — сингулярные числа оператора A, то есть собственные числа положительного оператора $(A^*A)^{1/2}$, занумерованные в порядке убывания. Класс всех вполне непрерывных операторов естественно обозначить через $\mathfrak{S}_{\infty}$.

В дальнейшем мы используем следующее предложение, на которое нам указал М. Г. Крейн.

Лемма 1. *Если* $A \in \mathfrak{S}_{\infty}$ и

$$\varepsilon_n(A) \ \min_{K \in \mathfrak{K}_n} |A - K| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $\mathfrak{K}_n$ — *множество всех* n-*мерных операторов в* $\mathfrak{H}$, *то*

$$\varepsilon_n(A) = s_{n+1}(A)$$

Доказательство. Как известно (см., напр., [1], стр. 310), оператор A представим в виде $A = UR$, где U — частично изометрический оператор, а $R = (A^*A)^{1/2}$. Пользуясь спектральным разложением

$$R = \sum_k s_k(A)(\cdot, \psi_k)\psi_k,$$

введем в рассмотрение n-мерные операторы

$$R_n = \sum_1^n s_k(A)(\cdot, \psi_k)\psi_k, \qquad K_n = UH_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Имеем

$$\varepsilon_n(A) \leq |A - K_n| = |U(R - R_n)| \leq |R - R_n| = s_{n+1}(A).$$

С другой стороны, для любого $K \in \mathfrak{K}_n$ и вектора φ, по норме равного 1, пользуясь минимаксимальными свойствами собственных чисел, получаем

$$\varepsilon_n(A) = \sup|(A - K)\varphi| \geqslant \sup_{\varphi \perp \mathfrak{N}(K)} |(A - K)\varphi| =$$

$$= \sup_{\varphi \perp \mathfrak{N}(K)} |A\varphi| = \sup_{\varphi \perp \mathfrak{N}(K)} |R\varphi| \geq s_{n+1}(A).$$

9°. *Если* $T \in \mathfrak{S}_\infty$, *то для любого* $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ *существует постоянная* $K(\alpha)$ *такая, что*

$$\varepsilon_{2n}(T^\alpha) \leq K(\alpha)\,\varepsilon_n^\alpha(T) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

причем $K(\alpha) \leq 4^\alpha C(\alpha)$, *где* $C(\alpha) = C(\alpha, 1)$ — *постоянная теоремы 1.*

Пусть $G = \frac{1}{2}(T + T^*)$ и $H = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ — эрмитовы компоненты оператора T, а G_n и H_n — n-мерные операторы, приближающие наилучшим образом соответственно G и H. Тогда оператор $T_n = G_n + iH_n$ диссипативен и

$$\varepsilon_{2n}(T^\alpha) \leq |T^\alpha - T_n^\alpha| \leq C(\alpha)\,|T - T_n|^\alpha \leq$$

$$\leq C(\alpha)(|H - H_n| + |G - G_n|)^\alpha = C(\alpha)(\varepsilon_n(G) + \varepsilon_n(H))^\alpha \leq 4^\alpha C(\alpha)\,\varepsilon_n^\alpha(T).$$

Из 9° немедленно вытекают следующие свойства:

10°. *Если* $T \in \mathfrak{S}_\infty$, *то и* $T^\alpha \in \mathfrak{S}_\infty$

11°. *Если* $s_n(T) = O(n^{-\varrho})$ (*соответственно* $o(n^{-\varrho})$), *то* $s_n(T^\alpha) = O(n^{-\varrho\alpha})$, (*соответственно* $o(n^{-\varrho\alpha})$).

12°. *Если* $T \in \mathfrak{S}_p$, *то* $T^\alpha \in \mathfrak{S}_{p/\alpha}$

Из 5° и 10° следует

13°. *Если* T *вольтерров, то вольтерров и* T^α.

Поясним, что оператор $T \in \mathfrak{S}_\infty$ называется вольтерровым, если его спектр сосредоточен в нуле.

3. О единственности корня n-й степени из ограниченного диссипативного оператора

Мы докажем такое предложение

Теорема 2. *Пусть* $S^n = T$ — *ограниченный диссипативный оператор и значения формы* $z = (Sf, f)$ *лежат в угле* $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{n}$. *Тогда* $S = T^{1/n}$.

Нам понадобится

Лемма 2*. *Пусть A — ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{H}$, спектр которого не содержит нуля, $X^n = Y^n = A$ и $X \smile\smile A$**. Тогда пространство $\mathfrak{H}$ распадается в прямую сумму*

$$\mathfrak{H} = \sum_{k=1}^{n} \dot{+}\, \mathfrak{H}_k$$

подпространств $\mathfrak{H}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, инвариантных относительно X и Y, причем часть оператора $Y - e^{\frac{2\pi ik}{n}} X$, лежащая в $\mathfrak{H}_k$, равна нулю.

Доказательство леммы. Очевидно, $Y \smile A$, а так как, по условию, $X \smile\smile A$, то $X \smile Y$. Поэтому $Y^n - X^n = \prod_1^n \left(Y - e^{\frac{2\pi im}{n}} X\right) = 0$. Подпространства $\mathfrak{H}_k = \mathfrak{R}\left(\prod_{m \neq k} \left(Y - e^{\frac{2\pi im}{n}} X\right)\right)$, в силу соотношения $X \smile Y$, инвариантны относительно X и Y; кроме того, они линейно независимы, так как совпадают с собственными подпространствами оператора $Z = X^{-1}Y$, соответствующими собственным числам $e^{\frac{2\pi ik}{n}}$. Определим теперь коэффициенты a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ так, чтобы $\sum_{k=1}^{n} a_k (\lambda^n - 1)\left(\lambda - e^{\frac{2\pi ik}{n}}\right)^{-1} \equiv 1$. Тогда любой элемент $f \in \mathfrak{H}$ представляется в виде $f = \sum_{k=1}^{n} f_k$, где $f_k = a_k \prod_{m \neq k} \left(Z - e^{\frac{2\pi im}{n}} I\right) f \in \mathfrak{H}_k$. Итак, $\mathfrak{H} = \sum_{k=1}^{n} \dot{+}\, \mathfrak{H}_k$. Очевидно, $\left(Y - e^{\frac{2\pi ik}{n}} X\right) \mathfrak{H}_k = (Y^n - X^n)\mathfrak{H} = 0$.

Следствие 1. *Пусть T — ограниченный диссипативный оператор, спектр которого не содержит нуля, $S^n = T$ и спектр S лежит в угле $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{n}$. Тогда $S = T^{1/n}$.*

Операторы $X = T^{1/n}$ и $Y = S$ удовлетворяют условиям леммы 2. Действительно, $X^n = Y^n = T$, а из формулы (4) следует, что $X = T^{1/n} \smile\smile T$. Так как спектры операторов X и Y лежат в угле $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{n}$, то все $\mathfrak{H}_k = 0$ при $k \neq n$. Значит, $Y = X$, т. е. $S = T^{1/n}$.

Совершенно аналогично получается

Следствие 2. *Предложение, сформулированное в следствии 1, справедливо также и для оператора $T \in \mathfrak{C}_\gamma$, для которого $\lambda = 0$ — регулярная точка.*

Доказательство теоремы. При любом $\varepsilon > 0$ значения формы $(S_\varepsilon f, f)$ оператора $S_\varepsilon = S + \varepsilon e^{\frac{\pi i}{n}} I$ лежат в угле $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{n}$. Спектр оператора $T_\varepsilon = S_\varepsilon^n$ содержится в верхней полуплоскости и не содержит точку 0. Кро-

---

* Лемма 2 и следствие 1 любезно сообщены нам В. А. Явряном. Использование этих предложений позволило значительно упростить первоначальное доказательство теоремы 2.

** В дальнейшем $X \smile A$ означает коммутацию X и A, а $X \smile\smile A$ — коммутацию X с каждым ограниченным оператором перестановочным с A.

ме того, резольвента этого оператора допускает оценку *

$$|(T_\varepsilon + iyI)^{-1}| \leqslant \prod_{k=1}^{n} |(S_\varepsilon - e^{\frac{\pi i(4k-1)}{2n}} y^{\frac{1}{n}} I)^{-1}| < \frac{1}{y \sin^n \frac{\pi}{2n}} \quad (0 < y < \infty).$$

Значит, $T_\varepsilon \in \mathfrak{C}_\gamma$ при $\gamma = \dfrac{1}{\sin^n \dfrac{\pi}{2n}}$. На основании следствия 2, $S_\varepsilon = T_\varepsilon^{1/n}$. В силу непрерывности, из $|T_\varepsilon - T| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ следует $|S_\varepsilon - T^{1/n}| \to 0$, т. е. $S = T^{1/n}$ Теорема доказана.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность В. Г. Крейну за внимание к работе и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.

2 R. Schatten, A theory of cross spaces, Princeton University Press, 1950.

Поступила 6.II 1961 г.
Харьков