Спектральное представление для амплитуды Бете — Сальпетера

А. Ф. Плиш

В работе [1] Ида вывел интегральное представление для амплитуды Бете—Сальпетера на основе лоренцевской инвариантности, локальной коммутативности, спектральности, асимптотического условия и условия стабильности с одной стороны и использования интегрального представления вакуумного среднего двойного коммутатора, найденного Дайсоном [2], с другой. Однако позже Мингуцци и Стритер [3] показали, что последнее не охватывает всех сингулярностей, которыми обладают вакуумные средние двойного коммутатора, а второй из авторов [4] нашел и более общее интегральное представление для них. Цель этой заметки, которая является прямым продолжением [5], показать, что преобразование Фурье амплитуды Бете—Сальпетера определенным образом выражается через абсорбтивную часть вершинной функции третьего порядка теории возмущений и что для него имеют место спектральные представления по одному из первых двух инвариантов при отрицательном другом, если третий инвариант находится на массовой оболочке. Перейдем к изложению.

Как известно (см., например, [1]), амплитуда Бете—Сальпетера для одночастичного состояния $|p>$ с 4-вектором энергии-импульса p — матричный элемент между состоянием $|p>$ и вакуумом $|0>$ хронологического произведения двух полевых операторов Φ_1 и Φ_2, то есть

$$f(x, p) = e^{ipX} < 0 \,|\, T\Phi_1(x_1)\,\Phi_2(x_2) \,|\, p > = < 0 \,|\, T\Phi_1\left(\frac{x}{2}\right)\Phi_2\left(-\frac{x}{2}\right) |\, p >, \tag{1}$$

---

* Для оценки каждого множителя здесь использовано такое простое предложение: если значения формы (Af, f) оператора A при $|f| = 1$ заполняют область Ω, то резольвента $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ в каждой точке регулярности λ допускает оценку $|R_\lambda| < \frac{1}{d_\lambda}$, где d_λ — расстояние от точки λ до области Ω.

где

$$x = x_1 - x_2,\ X = \frac{x_1 + x_2}{2},\ pX = p_0X_0 - p_1X_1 - p_2X_2 - p_3X_3$$

Спектральность означает, что

$$<0|\Phi_1|k><k|\Phi_2|0> = 0,\ <0|\Phi_2|l><l|\Phi_1|p> = 0 \qquad (2)$$

для p_k и p_l, которые удовлетворяют условиям $p_k^2 < a^2$ и $p_l^2 < b^2$ соответственно. Условие стабильности имеет вид

$$m \equiv \sqrt{p^2} < a + b \qquad (3)$$

Будем рассматривать модель, в которой рассматриваемые частицы имеют нулевой спин, а поля Φ_1 и Φ_2 скалярные, и введем [1] запаздывающую и опережающую амплитуды Бете—Сальпетера равенствами

$$f_{R,A}(x, p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4z(\Box_z - m^2) r_{R,A}(x, z; p), \qquad (4)$$

где

$$r_{R,A}(x; z; p) = \pm\,\theta(\pm x_0)\,\theta(py) <0\left|\left[\Phi^+(z), \left[\Phi_1\left(\frac{x}{2}\right), \Phi_2\left(-\frac{x}{2}\right)\right]\right]\right|0>, \qquad (4')$$

при $y = -\frac{x}{2} - z$.

Если теперь использовать при вычислении преобразований Фурье $\tilde{f}_{R,A}(q,p)$ выражений (4) интегральное представление вакуумного среднего двойного коммутатора, найденное Стритером [4], и интегральное представление тета-функции, с одной стороны, и условия стабильности (3) и спектральности (2), — с другой, то для преобразования Фурье $\tilde{f}(q, p)$ амплитуды Бете—Сальпетера (1) получим следующее интегральное представление

$$\tilde{f}(q, p) = F(z_1, z_2, m^2) = \int d\alpha d\beta ds\omega(\alpha, \beta, s)\, G(z_1, z_2, m^2; \alpha, \beta, s), \qquad (5)$$

где

$$G(z_1, z_2, m^2; \alpha, \beta, s) = \frac{1}{|\lambda(z_1, z_2, m^2)|^{\frac{1}{2}}} \ln \frac{Y_0 - Y_1^{\frac{1}{2}}}{Y_0 + Y_1^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y_0 = m^2(z_1 - \beta - s) + (\alpha + \beta)(z_2 - z_1), \quad Y_1 = [(\alpha + \beta)^2 - \alpha m^2]\,\lambda(z_1, z_2, m^2),$$

$$z_1 = \left(q + \frac{p}{2}\right)^2,\ z_2 = \left(q - \frac{p}{2}\right)^2,\ z_3 = p^2,\ p = (p_0, \vec{p}) = (m, \vec{0}),\ m > 0,$$

а

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_3\alpha_1 \qquad (5')$$

Носитель весовой функции определяется условиями

$$\alpha, \beta, s \geqslant 0,\ m^2 \geqslant \alpha + 2\beta,$$

$$0 < r_0 \leqslant \frac{m}{2},\ r_0 \leqslant \sqrt{r_0^2 + \alpha} \leqslant m - r_0, \qquad (5'')$$

$$\sqrt{s} \geqslant \max\{0, a - \sqrt{\alpha},\ b - \sqrt{m^2 - \alpha - 2\beta}\},$$

где $r_0 = \frac{1}{m}\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - \alpha m^2}$

Заметим, что перед интегралом в (5) опущена несущественная константа

Введем, далее, вместо переменной β новую переменную ν равенством

$$\beta = \frac{m^2 - \nu - \alpha}{2}, \quad (m^2 - \alpha - \nu \geqslant 0). \tag{6}$$

Тогда (5) примет вид

$$F(z_1, z_2, m^2) = \int d\nu d\alpha ds \varphi(m^2; \nu, \alpha, s) A^p(z_1, z_2, m^2; \nu, \alpha, s) \tag{7}$$

при

$$\varphi(m^2; \nu, \alpha, s) = -\frac{1}{2} \omega(\alpha, \beta, s)\Big|_{\beta = \frac{m^2 - \nu - \alpha}{2}},$$

$$A^p(z_1, z_2, m^2; \nu, \alpha, s) = \frac{\theta(m^2 - \nu - \alpha)}{[\lambda(z_1, z_2, m^2)]^{\frac{1}{2}}} \ln \frac{Z_0 + Z_1^{\frac{1}{2}}}{Z_0 - Z_1^{\frac{1}{2}}}, \tag{7'}$$

где

$$Z_0 = 2s + m^2 - (z_1 + z_2 + \nu + \alpha) - \frac{1}{m^2}(z_1 - z_2)(\nu - \alpha),$$

$$Z_1 = \frac{1}{m^4} \lambda(\nu, \alpha, m^2) \lambda(z_1, z_2, m^2),$$

а $\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ определяется равенством (5′).

Несколько громоздкий, но вполне элементарный анализ системы неравенств (5) с учетом (6) дает следующие условия, которые определяют носитель весовой функции $\varphi(m^2; \nu, \alpha, s)$ интегрального представления для преобразования Фурье (7) амплитуды Бете — Сальпетера (1):

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \nu \leqslant m^2, \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant m^2 + \nu - 2m\sqrt{\nu}, \\ \sqrt{s} \geqslant \max\{0,\ a - \sqrt{\alpha},\ b - \sqrt{\nu}\}. \end{gathered} \tag{7''}$$

Важно отметить, что A^p — абсорбтивная часть вершинной функции третьего порядка теории возмущений [6].

Покажем, наконец, что если один из инвариантов z_1 и z_2 отрицателен, например z_1, то (7) может быть записано в следующей спектральной форме

$$F(z_1, z_2, m^2) = \int_{b^2}^{\infty} dz_2' \frac{A_2(z_1, z_2', m^2)}{z_2' - z_2}. \tag{8}$$

Для этого воспользуемся приемом, примененным Ямамото [7] при доказательстве двойных спектральных представлений для вершинной функции, а именно: представим абсорбтивную часть A^p, определяемую равенством (7′), в следующей форме

$$A^p(z_1, z_2, m^2; \nu, \alpha, s) = \int_{a_0 - b_0}^{a_0 + b_0} dz_2' \frac{[\lambda(z_1, z_2', m^2]^{-\frac{1}{2}}}{z_2' - z_2} \tag{9}$$

при

$$a_0 = s + \nu - \frac{1}{2\alpha}(z_1 - \alpha - s)(m^2 - \nu - \alpha), \quad b_0 = \frac{1}{2\alpha}[\lambda(z_1, \alpha, s) \lambda(\nu, \alpha, m^2)]^{\frac{1}{2}}$$

Подставляя (9) в (7) и вводя функцию $\Psi(z_1, z_2', m^2)$ — результат интегрирования по области (7″), получаем

$$F(z_1, z_2, m^2) = \int_{b^2}^{\infty} \frac{dz_2' \Psi(z_1, z_2', m^2)}{(z_2' - z_2)\sqrt{\lambda(z_1, z_2', m^2)}}. \tag{10}$$

Заметим, что перед интегрированием по области (7″) мы зафиксировали $z_1 < 0$ и выбрали постоянными пределы интегрирования не по ν, а по z_2' (см. более подробно [7]). Поскольку, далее, $m > 0$, то при $z_1 < 0$ и z_2', лежащем в интервале (b^2, ∞), $\lambda(z_1, z_2', m^2) \neq 0$. Вводя в (10) функцию

$$A_2(z_1, z_2', m^2) = \frac{\Psi(z_1, z_2', m^2)}{\sqrt{\lambda(z_1, z_2', m^2)}},$$

получаем представление (8).

Меняя местами z_1 и z_2, с одной стороны, а ν и α — с другой, аналогичным образом из (7) при $z_2 < 0$ получаем спектральное представление по z_1

$$F(z_1, z_2, m^2) = \int_{a^2}^{\infty} dz_1' \frac{A_1(z_1', z_2, m^2)}{z_1' - z_1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Ida, Integral Representation of Bethe—Salpeter Amplitudes, Prog. Theor. Phys., 23 (1960), 1159.
2. F. J. Dyson, Integral Representation of Double Commutator, Phys. Rev., 111 (1958), 1717.
3. A. Mingyzzi and R. F. Streater, Some Remarks on the Vertex Function, Phys. Rev., 119 (1960), 1127.
4. R. F. Streater, Special Methods of Analytic Completion in Field Theory, Proc. Roy, Soc., 256 (1960), 39.
5. A. Ф. Пліш, Інтегральне представлення амплітуди Бете—Сальпетера, Доповіді АН УРСР, № 3, 1962.
6. K. Yamamoto, Integral Representation of Absorptive Part of Vertex Function, Prog. Theor. Phys., 25 (1961), 361
7. K. Yamamoto, Double Dispersion Representation of Vertex Function, Prog. Theor. Phys., 25, (1961), 720.

Поступила 9.XI 1961 г.
Киев