Применение одного полуобратного метода при решении задач фильтрации под гидротехническими сооружениями

Шт. И. Георгицэ

1. В статье [1] был изложен полуобратный метод решения некоторых плоских задач математической физики. Цель данной работы — показать, как можно получить при помощи этого метода простые аналитические решения, которые бы давали достаточно точные приближения для некоторых задач фильтрации, фактически встречающихся на практике, или могли бы послужить исходным моментом для применения других методов изучения движения грунтовых вод под плотинами, как, например, метода, изложенного в работе Г. Н. Положего [2].

В статье будет также использован метод последовательных конформных отображений, но, в отличие от работы П. Ф. Фильчакова [4], форма областей в последовательных плоскостях будет взята как функция от границ водных бассейнов или как функция от водонепроницаемых участков границ.

Как обычно, движение будем рассматривать установившимся при условии применимости закона Дарси, а жидкость будем считать несжимаемой.

2. Рассматривая плоское движение под непроницаемой плотиной, обозначим через C_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ дуги, на которые раскладывается в плоскости движения граница области D_0, занятой пористой средой: C_1 — границу верхнего бьефа, C_2 — основание плотины, C_3 — границу нижнего бьефа, C_4 — границу водоупора. Обозначим через $M_{j-1,j}$ и $M_{j,j+1}$ концы дуги C_j $(M_{01} \equiv M_{45} \equiv M_{41})$. Взяв ось Oy по возрастающей вертикали, получим следующие граничные условия: $\varphi = -kH$ на C_1; $\psi = 0$ на C_2; $\varphi = 0$ на C_3 и $\psi = -Q$ на C_4. Далее следует, что если конформно отобразим область комплексного потенциала $f(z) = \varphi + i\psi$ на полуплоскость $t_2 < 0$ плоскости $t = t_1 + it_2$ и при этом точки M_{12} и M_{23} переведем в точки -1 и $+1$ действительной оси, а M_{41} и M_{34} — соответственно в точки $-\frac{1}{\varkappa}$ и $+\frac{1}{\varkappa}$ $(\varkappa < 1)$, то получим, используя хорошо известные обозначения, принятые в монографии П. Я. Полубариной-Кочиной [3],

$$f = \frac{kH}{2K}[F(\arcsin t;\ \varkappa) - K]. \tag{1}$$

В физической плоскости $z = x + iy$ рассмотрим область $D \supset D_0$ так, чтобы отображение области D на нижнюю полуплоскость комплексного переменного s_1 могло быть легко выполнено при помощи соотношения

$$s_1 = F_1(z).$$

Границы этих двух областей имеют, вообще говоря, общие части. Обозначим через C_{11}, $C_{12}, \ldots, C_{1j_1}$, C_{21}, $C_{22}, \ldots, C_{2j_2}$, C_{31}, $C_{32}, \ldots, C_{3j_3}$, C_{41}, $C_{42}, \ldots, C_{4j_4}$ дуги границы D_0, которые находятся в D. Образы их в плоскости s_1 будут дуги j $\left(j = \sum_{p=1}^{4} j_p\right)$ из нижней полуплоскости $C_{11}^{(1)}, \ldots, C_{1j_1}^{(1)}$, $C_{22}^{(1)}, \ldots C_{2j_2}^{(1)}, \ldots, C_{4j_4}^{(1)}$. Выберем теперь дугу, например $C_{11}^{(1)}$, которая имеет концы в $A_{11}^{(1)}$ и $B_{11}^{(1)}$, и осуществим конформное отображение области из нижней полуплоскости, ограниченной лучами $-\infty A_{11}^{(1)}$, $B_{11}^{(1)} \infty$ и дугой $C_{11}^{(1)}$, на нижнюю полуплоскость плоскости s_2 при помощи соотношения

$$s_2 = F_2(s_1).$$

Дугам из физической плоскости C_{12}, $C_{13}, \ldots, C_{4j_4}$ будут соответствовать в новой плоскости $j-1$ дуг $C_{12}^{(2)}$, $C_{13}^{(2)}, \ldots, C_{4j_4}^{(2)}$. Отобразив далее нижнюю полуплоскость s_2 минус область, которая содержится между действительной осью и кривой $C_{12}^{(2)}$, на нижнюю полуплоскость s_3 с помощью соотношения

$$s_3 = F_3(s_2),$$

найдем, что образам дуг из физической плоскости $C_{13}, \ldots, C_{4j_4}$ будут соответствовать $j-2$ дуги $C_{13}^{(3)}, \ldots, C_{4j_4}^{(3)}$ и т. д. В последней плоскости s_j образом C_{4j_4} будет дуга $C_{4j_4}^{(j)}$, так что отобразив конформно область, ограниченную лучами $-\infty$ $A_{4j_4}^{(j)}$, $B_{4j_4}^{(j)} \infty$ и дугой $C_{4j_4}^{(j)}$, на нижнюю полуплоскость плоскости s, с помощью соотношения

$$s = F(s_j)$$

сможем последовательно вычислить s из полученных выше соотношений как функцию от z. Таким образом, точкам M_{41}, M_{12}, M_{23}, M_{34} будут соответствовать в плоскости s точки m_{41}, m_{12}, m_{23}, m_{34} действительной оси. При помощи дробно-линейного преобразования перейдем от нижней полуплоскости s к полуплоскости $t_2 < 0$ так, чтобы

$$-t(m_{12}) = t(m_{23}) = 1; \qquad t(m_{41}) + t(m_{31}) = 0. \tag{2}$$

С помощью этой операции определим параметры дробно-линейного преобразования и модуль эллиптических интегралов из (1), так как

$$\frac{1}{\varkappa} = t(m_{34}), \tag{3}$$

а следовательно, и расход под плотиной. Что касается кривых $C_{11}, \ldots, C_{4j_4}$, то они определятся аналитически при помощи надлежащего выбора последовательных областей, которые конформно отображаем на полуплоскость.

Заметим, что некоторые из точек M_{41}, M_{12}, M_{23}, M_{34} или даже все, могут быть на границе D, что вызовет несущественную произвольность в обозначениях нескольких дуг, самое большее четырех.

3. Рассмотрим теперь простой пример применения этого метода, когда $j = 1$. В качестве области D возьмем полуполосу $-T < y < 0$ и потребуем соответствия следующих пар точек в плоскостях z и s: (0; 0), (l; 1), ($-iT$; ∞). Обозначая через $-\frac{1}{\varkappa^*}$ и $+\frac{1}{\varkappa^*}$ аффиксы точек, в которые перейдут M_{41} и M_{31}, получаем связь между z и s:

$$z = \frac{T}{\pi} \ln \frac{1 + \varkappa^* s_1}{1 - \varkappa^* s_1}; \qquad s_1 = \frac{1}{\varkappa^*} \operatorname{th} \frac{\pi z}{2T}, \tag{4}$$

где

$$\varkappa^* = \operatorname{th} \frac{\pi l}{2T} \tag{5}$$

и взято главное значение логарифма.

В качестве образа дуги C из физической плоскости z в плоскости s_1 возьмем полукруг радиуса R с центром в точке $s_1 = \alpha$, который пересекает действительную ось в точках A и B. При этом возможны оба случая: $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$. Параметрические уравнения дуги C будут:

$$\begin{gathered} x = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{U^2 + 4\varkappa^{*2} R^2 - 4U\varkappa^{*2}\alpha R \cos\theta - 4(\alpha^2\varkappa^{*2} - 1)\varkappa^{*2} R^2 \cos^2\theta}{[2 - U - 2\varkappa^*\alpha + 2\varkappa^* R(\varkappa^*\alpha - 1)\cos\theta]^2}, \\ y = \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\varkappa^* R \sin\theta}{U - 2\varkappa^{*2}\alpha R\cos\theta}, \end{gathered} \tag{6}$$

где $U = 1 - \varkappa^{*2}(\alpha^2 + R^2)$ и θ изменяется между 0 и $-\pi$.

Далее,

$$2s = s_1 - \alpha + \frac{R^2}{s_1 - \alpha}, \tag{7}$$

так что при помощи дробно-линейного преобразования

$$t = \frac{as + b}{s + c} \tag{8}$$

переход к плоскости t осуществится следующим образом:

I. Если точки A и B находятся в плоскости s_1 обе на одном из отрезков $\left(-\infty, \frac{-1}{\varkappa^*}\right)$; $\left(\frac{-1}{\varkappa^*}, -1\right)$; $(-1, +1)$; $\left(1, \frac{1}{\varkappa^*}\right)$ или $\left(\frac{1}{\varkappa^*}, \infty\right)$, то, вводя обозначения

$$\begin{gathered} S_1 \equiv s(m_{41}) = -\frac{(1 + \varkappa^*\alpha)^2 + (\varkappa^* R)^2}{2\varkappa^*(1 + \varkappa^*\alpha)}; \qquad S_2 \equiv s(m_{12}) = -\frac{(1 + \alpha)^2 + R^2}{2(1 + \alpha)}; \\ S_3 \equiv s(m_{23}) = \frac{(1 - \alpha)^2 + R^2}{2(1 - \alpha)}; \qquad S_4 \equiv s(m_{34}) = \frac{(1 - \varkappa^*\alpha)^2 + (\varkappa^* R)^2}{2\varkappa^*(1 - \varkappa^*\alpha)}, \end{gathered} \tag{9}$$

из (2) получаем три уравнения для определения a, b и c:

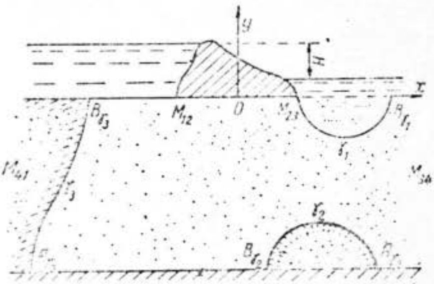
$$\begin{gathered} -S_2 - c = aS_2 + b; \qquad S_3 + c = aS_3 + b; \\ 2(aS_1 S_4 + bc) + (S_1 + S_4)(ac + b) = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

II. Если точка A находится на одном из указанных отрезков, а точка B — на соседнем отрезке $\left[\text{например } A \text{ — на } \left(-\frac{1}{\varkappa^*}, -1\right);\ B \text{ — на } \left(-\infty, \frac{-1}{\varkappa^*}\right) \text{ или } (-1, +1)\right]$, т. е. одна из точек M не находится на границе D_0, то воспользуемся только тремя из соотношений (9), а вместо четвертого возьмем

$$S = R\cos\tilde{\theta}, \tag{11}$$

где $\tilde{\theta}$ является углом на плоскости s_1, который образован отрезком, соединяющим центр полукруга с точкой M и действительной осью. Предположим, для конкретности, что эта точка есть точка M_{41}, так что α отрицательно и $\alpha + R > \frac{-1}{\varkappa^*} > \alpha - R$. Комплексный потенциал тогда будет иметь вид [3]

$$
f = \frac{kH}{2K} F \left\{ \arcsin \frac{a \operatorname{th}^2 \frac{\pi z}{2T} + 2\varkappa^* (b - c\alpha) \operatorname{th} \frac{\pi z}{2T} + a(1 - U) - 2b\alpha\varkappa^{*2}}{\operatorname{th}^2 \frac{\pi z}{2T} + 2\varkappa^* (c - \alpha) \operatorname{th} \frac{\pi z}{2T} + 1 - U - 2c\alpha\varkappa^{*2}} ; \varkappa \right\} - \frac{kH}{2}. \tag{12}
$$



Мы вычислили три конкретных случая, два из них—соответствующие I условию, а последний II — когда $3l = T$, и, следовательно, $\varkappa^* = 0{,}48$ и $\frac{1}{\varkappa^*} = 2{,}083$ (рисунок):

$1^\circ.\ \alpha = 1{,}4; \quad R = 0{,}4.$

$2^\circ.\ \alpha = 6{,}0; \quad R = 3{,}5.$

$3^\circ.\ \alpha = -2{,}0; \quad R = 0{,}2; \quad \widehat{\vartheta} = 0.$

В первом случае область движения ограничена лучами $(-\infty, M_{23})$, $(B\gamma_1, \infty)$ дугой γ_1 и прямой $y = -T$, во втором—образована действительной осью, лучами $(\infty, A\gamma_2)$, $(B\gamma_2, -\infty)$ и дугой γ_2; в последнем случае область движения ограничена лучами $(A\gamma_3, \infty)$ $(B\gamma_3, \infty)$ и дугой γ_3. Используя таблицы эллиптических функций [5], находим значения приведенных расходов в рассмотренных случаях:

$$
q_1 = \frac{Q_1}{kH} = 0{,}858; \qquad q_2 = \frac{Q_2}{kH} = 0{,}513; \qquad q_3 = \frac{Q_3}{kH} = 0{,}618;
$$

$$
q^* = \frac{Q^*}{kH} = 0{,}654.
$$

Как и следовало ожидать, расход Q^*, соответствующий полосе, меньше, чем расход Q_1, соответствующий первому случаю, но больше, чем расходы Q_2, и Q_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. St. I. Gheorghitza, A semi-inverse method in plane hydrodynamics, Arch. Mech. Stosowanej, tom XI, pg. 681, 1959.
2. Г. Н. Положий, Метод движения граничных точек и мажорантных областей в теории фильтрации, УМЖ, т. V, № 4, 1953, 380.
3. П. Я. Полубаринова-Кочина, Теория движения грунтовых вод, М., 1952, 91.
4. П. Ф. Фильчаков, Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями, т. 2, гл. III, К., 1960.
5. F. Oberhettinger, W. Magnus, Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik, s., 114—115, Berlin, 1949.

Поступила 1. VI 1962 г.
Бухарест

Application of a semi-inverse method to steady motions under dams

St. I. Gheorghitza

Summary

The method given in [1] is applied to steady plane motions under impervious dams. After general considerations, three particular cases are calculated.