Классы сопряженных элементов в топологических группах

В. И. Ушаков

В последнее время на развитие топологической алгебры заметное влияние оказывают идеи абстрактной теории групп. Многие разделы теории групп уже нашли себе место в рамках теории топологических групп. Так, в ряде работ изучались топологические группы с различными условиями конечности (А. Г. Курош посвятил свою работу [6] вопросу о сопряженности силовских p-подгрупп в нульмерной топологической группе, а В. М. Глушков в работах [7] и [8] рассматривал топологические группы с условием максимальности и минимальности для замкнутых подгрупп). Одним из наиболее интересных условий конечности в общей теории групп является условие конечности всех классов сопряженных элементов. Группы с этим свойством изучались многими авторами. Самые значительные результаты были получены в работах Р. Бэра [2], Б. Неймана [3] и С. Н. Черникова [4]. В настоящей работе рассматриваются классы сопряженных элементов в топологических группах. Основным объектом изучения служат так называемые $\overline{FC}$-группы, являющиеся естественным обобщением групп с конечными классами сопряженных элементов. Полученные результаты обобщают хорошо известные факты из теории дискретных групп.

Пусть G — топологическая группа, g — ее элемент. Через S_g обозначим класс сопряженных с g элементов группы G. Возникает вопрос, будет ли S_g замкнутым подмножеством в произвольной топологической группе? Построенный ниже пример дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Возьмем счетную последовательность циклических групп второго порядка

$$A_0, A_1, A_{-1}, \ldots, A_k, A_{-k}, \ldots; \ A_k = \{a_k\}, \ a_k^2 = 1, \ k = 0, \pm 1, \ldots .$$

Рассматривая эти группы как дискретные, составим их топологическое прямое произведение $H = \prod\limits_{k=0,\pm 1,\ldots} A_k$. Группа H будет бикомпактной. Система подгрупп $H_n = \prod\limits_{|k|>n} A_k$, $n = 0, 1, \ldots$, является полной системой окрестностей единицы этой группы. В качестве искомой группы G возьмем полупрямое произведение H и бесконечной циклической группы $B = \{b\}$, причем закон умножения задается формулой

$$b^{-1}a_k b = a_{k+1}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots .$$

Топологию в G можно задать, взяв в качестве полной системы окрестностей единицы систему Σ подгрупп H_n, $n=0,1,\ldots$ Возможность такой топологизации группы G вытекает из того, что аксиомы а)—е) из [1] (см. § 18, В), определяющие полную систему окрестностей единицы топологической группы, выполнены для нашей системы Σ. Легко видеть, что группа G локально бикомпактна и вполне несвязна. Наконец, для любого натурального n и любого элемента a_k найдется такое l, что

$$b^{-l}a_kb^l = a_{k+l} \in H_n.$$

Это значит, что в любой окрестности единицы группы G содержатся элементы из S_{a_k}, то есть S_{a_k} незамкнуто.

Таким образом, даже в случае локально бикомпактных вполне несвязных групп классы сопряженных элементов не всегда замкнуты.

Замечание. Построение этого примера производится с помощью незначительного видоизменения известной теоретико-групповой конструкции сплетения двух групп.

Определение 1. *Элемент g топологической группы G называется FC-элементом, если множество S_g бикомпактно, и — $\overline{FC}$-элементом, если бикомпактно замыкание этого множества $\overline{S}_g$.*

Очевидно, всякий FC-элемент является $\overline{FC}$-элементом. Обратное, как мы впоследствии увидим, не всегда имеет место.

Определение 2. *Топологическая группа G называется FC-группой, если каждый ее элемент является FC-элементом, и — $\overline{FC}$-группой, если все ее элементы являются $\overline{FC}$-элементами.*

В дальнейшем будем иметь дело преимущественно с $\overline{FC}$-группами. Заметим, что в случае дискретных групп FC- и $\overline{FC}$-группы — это группы с конечными классами сопряженных элементов.

Приведем несколько достаточных признаков FC- и $\overline{FC}$-групп.

1. *Всякая коммутативная группа является FC-группой.*

2. *Всякая бикомпактная группа является FC-группой.*

Доказательство. Рассмотрим отображение f: $x \to x^{-1}gx$ бикомпактной группы G на S_g. Легко проверяется, что f — непрерывное отображение, непрерывный же образ бикомпактного пространства бикомпактен.

3. *Если в группе G существует полная система окрестностей единицы G_α, $\alpha \in M$, состоящая из бикомпактных нормальных делителей, фактор-группы по которым обладают конечными классами сопряженных элементов, то G является $\overline{FC}$-группой.*

Доказательство. Рассмотрим фактор-группу $G^* = G/G_\alpha$. Если $g^* = gG_\alpha$ — произвольный элемент из G^*, то класс S_{g^*} сопряженных с g^* элементов группы G^* конечен и, следовательно, бикомпактен. Полным прообразом множества S_{g^*} в G является $G_\alpha S_g$. Это множество бикомпактно (см. [1], § 19, *I*). А тогда и $\overline{S}_g = \bigcap_{\alpha \in M} G_\alpha S_g$ бикомпактно

4. *Если замыкание коммутанта $K(G)$ группы G бикомпактно, то G является $\overline{FC}$-группой.*

Доказательство. Множество $[g, G]$, состоящее из всевозможных коммутаторов $[g, x] = g^{-1}x^{-1}gx$, $x \in G$, содержится в $K(G)$ и поэтому обладает бикомпактным замыканием. Отсюда следует, что множество $g \cdot [g, G]$ также бикомпактно, и достаточно только показать, что $S_g \subseteq g \cdot [g, G]$. Но это включение вытекает из соотношения

$$x^{-1}gx = g \cdot g^{-1}x^{-1}gx = g \cdot [g, x].$$

Из последнего предложения вытекает существование $\overline{FC}$-групп, не являющихся FC-группами. Действительно, группа, построенная в начале нашей работы, не является FC-группой, так как в ней существуют незамкнутые классы сопряженных элементов. Коммутант этой группы содержится в бикомпактном нормальном делителе H и, следовательно, обладает бикомпактным замыканием. По доказанному, G является $\overline{FC}$-группой

В случае дискретных групп из 4 получается известная теорема (Нейман [3]) о том, что в группе с конечным коммутантом классы сопряженных элементов конечны.

5. *Если фактор-группа группы G по ее центру Z бикомпактна, то G является FC-группой.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{Z}(g)$ централизатор элемента $g\in G$. Отображение $\varphi : x^{-1}gx \to x\mathfrak{Z}(g)$, $x\in G$, является взаимно однозначным и непрерывным отображением S_g на фактор-пространство $G/\mathfrak{Z}(g)$. Докажем, что φ открыто. Пусть U — произвольная окрестность элемента $x^{-1}gx$ в топологическом пространстве S_g. Она является пересечением S_g с некоторой областью $\tilde{U}$ пространства G. Существует такая окрестность V элемента x, что $V^{-1}gV \subseteq \tilde{U}$. Рассмотрим окрестность V^* элемента $x^* = x\mathfrak{Z}(g)$ в $G^* = G/\mathfrak{Z}(g)$, состоящую из всех элементов $y\mathfrak{Z}(g)$, где $y \in V$. Очевидно, V^* содержится в образе $\tilde{U}$ при отображении φ. Таким образом, φ — гомеоморфное отображение. Из очевидного включения $Z \subseteq \mathfrak{Z}(g)$ вытекает теперь бикомпактность $G/\mathfrak{Z}(g)$ и, следовательно, бикомпактность S_g.

Определение 3. *Топологическая группа G называется локально нормальной, если любой ее элемент содержится в бикомпактном нормальном делителе.*

Из [1] (см § 17, G) следует, что любое конечное множество элементов локально нормальной группы содержится в бикомпактном нормальном делителе.

В случае дискретных групп это будут группы, у которых каждый элемент содержится в конечном нормальном делителе.

Определение 4. *Элемент g топологической группы G называется бикомпактным, если замыкание циклической подгруппы $\{g\}$, порожденной этим элементом, бикомпактно.*

Подмножество P группы G называется периодическим, если все его элементы бикомпактны.

В случае дискретных групп понятие бикомпактного элемента превращается в понятие элемента конечного порядка.

Очевидно, что всякая локально нормальная топологическая группа является периодической $\overline{FC}$-группой. Обратное утверждение будет доказано для групп, обладающих бикомпактной открытой подгруппой. Этот класс групп включает в себя вполне несвязные локально бикомпактные группы. Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма. *Пусть G — топологическая группа, содержащая открытую бикомпактную подгруппу H, B — периодическое инвариантное подмножество G, обладающее бикомпактным замыканием $\overline{B} = F$. Тогда $\{F\}$ является бикомпактным нормальным делителем группы G.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать множества B и F симметрическими, то есть содержащими вместе с любым элементом обратный к нему элемент. Действительно, в противном случае мы рассматривали бы симметрическое инвариантное периодическое множество $C = B\cup B^{-1}$, содержащее B и обладающее бикомпактным симметрическим замыканием $\overline{C} = \overline{B} \cup \overline{B}^{-1}$.

Рассмотрим множество областей $b\cdot H$, где b пробегает все множество B. Эти области целиком покрывают F. В самом деле, пусть f — произвольный элемент из F. Так как $f^{-1}f = 1 \in H$, то существует такая окрестность U элемента f, что $U^{-1}U \subseteq H$. В окрестности U найдется элемент $b \in B$. Так как $b^{-1}U \subseteq H$, то $U \subseteq bH$. Следовательно, $f \in bH$. Из покрытия бикомпактного множества F областями bH, $b \in B$ можно выделить конечное покрытие, состоящее из областей $b_1H, b_2H, \ldots, b_nH$, где ни один из элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ не лежит в H и, возможно, еще из области H. Пусть $\overline{\{b_i\}}$-подгруппа группы G, топологически порождаемая элементом b_i, $i =$

$= 1, 2, \ldots, n$. Образуем группу

$$G^* = \overline{\{b_1\}} \times \overline{\{b_2\}} \times \ldots \times \overline{\{b_n\}} \times H.$$

Эта группа бикомпактна в силу бикомпактности H и $\overline{\{b_i\}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим отображение

$$\varphi : (b_1', \ldots, b_n', h) \to b_1' b_2' \ldots b_n' \cdot h,\ b_i' \in \overline{\{b_i\}},\ i = 1, \ldots, n,\ h \in H$$

группы G^* в G. Это отображение непрерывно, поэтому множество $G^*\varphi$ бикомпактно. Докажем, что $\{F\} \subseteq G^*\varphi$. Из симметричности F вытекает, что $\{F\} = \bigcup\limits_{n=1,2,\ldots} F^n$. Поэтому произвольный элемент x из $\{F\}$ имеет вид $f_1 f_2 \ldots f_l$, где $f_k \in F$, $k = 1, 2, \ldots, l$. Так как F покрывается областями $b_i H$, $b_i \in H$ $i = 1, \ldots, n$ и, возможно, еще областью H, то $f_k = b_{i_k} h_k$, $h_k \in H$ или же $f_k \in H$, $k = 1, \ldots, l$.

Таким образом, x представляется в виде слова

$$h_0 b_{i_1} h_1 b_{i_2} h_2 \ldots b_{i_k} h_k, \tag{1}$$

составленного из элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и элементов из H (при этом не исключено, что некоторые h_i равны единице и что один и тот же элемент b_j может встречаться в слове несколько раз). Число k назовем длиной данного слова. Достаточно доказать, что любое слово такого вида содержится в $G^*\varphi$. Для этого покажем, что всякое слово (1) может быть преобразовано в так называемое нормальное слово

$$b_{j_1} b_{j_2} \ldots b_{j_r} h, \tag{2}$$

где $1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots \leqslant j_r \leq n$, $h \in H$ (очевидно, что каждое нормальное слово лежит в $G^*\varphi$). Доказательство проводим индукцией по длине слова (1). Если длина слова равна единице, то оно имеет вид $hb_i h'$, где $h, h' \in H$. Рассмотрим элемент $hb_i h^{-1}$. Этот элемент лежит в B (в силу инвариантности B). Так как B покрывается областями $b_1 H, b_2 H, \ldots, b_n H$ и, возможно, еще областью H, то $hb_i h^{-1} = b_j h_1$ или $hb_i h^{-1} = h_1$, где $h_1 \in H$. Поэтому слово $hb_i h' = (hb_i h^{-1})\, hh'$ или содержится в H, или имеет вид $b_j \tilde{h}$, $\tilde{h} \in H$.

Таким образом, всякое слово длины 1 преобразуется в нормальное слово длины 1 или 0.

Пусть уже доказано, что каждое слово длины $< k$ можно преобразовать в нормальное слово (привести к нормальному виду) так, чтобы при этом не произошло увеличения длины слова. Нам нужно доказать, что слово (1) длины $k > 1$ переводится в нормальное слово длины $\leq k$.

Прежде всего, заметим, что достаточно рассмотреть лишь такие слова, у которых на первом месте стоит один из элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$. В самом деле, если в слове (1) $h_0 \neq 1$, то рассмотрим элемент $h_0 b_{i_1} h_0^{-1}$, лежащий в B и, следовательно, имеющий вид $b_i h$ или h, $h \in H$. В первом случае

$$h_0 b_{i_1} h_1 b_{i_2} h_2 \ldots b_{i_k} h_k = (h_0 b_{i_1} h_0^{-1})\, h_0 h_1 b_{i_2} h_2 \ldots b_{i_k} h_k = b_i h h_0 h_1 b_{i_2} h_2 \ldots b_{i_k} h_k,$$

то есть слово (1) приводится к нужному нам виду. Во втором случае

$$h_0 b_{i_1} h_1 b_{i_2} \ldots b_{i_k} h_k = h h_0 h_1 b_{i_2} h_2 \ldots b_{i_k} h_k,$$

то есть получили слово, длина которого $< k$.

Итак, все свелось к слову вида

$$b_{i_1} h_1 b_{i_2} h_2 \ldots b_{i_k} h_k. \tag{3}$$

Слово $h_1 b_{i_2} h_2 \ldots b_{i_k} h_k$ имеет длину $k - 1$, и его, согласно предположению индукции, можно привести к нормальному виду:

$$h_1 b_{i_2} h_2 \ldots b_{i_k} h_k = b_{j_1} b_{j_2} \ldots b_{j_s} h, \quad 1 \leqslant j_1 \leqq j_2 \leqq \ldots \leqslant j_s \leqslant n, \quad h \in H,$$

причем $s \leqq k-1$. Если $i_1 \leqslant j_1$, то слово

$$b_{i_1} h_1 b_{i_2} h_2 \ldots b_{i_k} h_k = b_{i_1} b_{j_1} \ldots b_{j_s} h$$

уже имеет нормальную форму. Пусть $i_1 > j_1$. Тогда

$$b_{i_1} b_{j_1} b_{j_2} \ldots b_{j_s} h = b_{j_1} (b_{j_1}^{-1} b_{i_1} b_{j_1}) b_{j_2} \ldots b_{j_s} h.$$

Так как $b_{j_1}^{-1} b_{i_1} b_{j_1} \in B$, то элемент $(b_{j_1}^{-1} b_{i_1} b_{j_1}) b_{j_2} \ldots b_{j_s} h$ является словом относительно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и элементов из H, причем его длина $\leqq s$ и, значит, $\leqq k-1$. Согласно предположению индукции, его можно привести к нормальной форме

$$b_{l_1} \ldots b_{l_r} h',$$

где $1 \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqq l_r \leqq n$, $h' \in H$, причем $r \leqslant k-1$. Слово (3) принимает теперь вид

$$b_{j_1} b_{l_1} \ldots b_{l_r} h'.$$

Если $j_1 \leqslant l_1$, то слово уже является нормальным.

Если же $j_1 > l_1$, то, как и выше, преобразуем наше слово к виду

$$b_{l_1} b_{m_1} \ldots b_{m_t} h'',$$

где $1 \leqq m_1 \leqq \ldots \leqq m_t \leqq n$, $h'' \in H$, $t \leqq k-1$. Так как в результате этих преобразований индексы элементов, стоящих впереди, все время уменьшаются, то через конечное число шагов мы получим нормальное слово длины $\leqq k$. Следовательно, доказано, что $\{F\} \subseteq G^*\varphi$, а так как $G^*\varphi$ замкнуто в G, то и $\overline{\{F\}} \subseteq G^*\varphi$. Значит, $\overline{\{F\}}$—бикомпактный нормальный делитель группы G.

В случае дискретных групп доказанная лемма превращается в известную лемму Дицмана (см. [5], стр. 339). Из доказанной леммы сразу получается следующая теорема.

Теорема 1. *Всякая периодическая $\overline{FC}$-группа, обладающая бикомпактной открытой подгруппой, локально нормальна.*

Основным результатом работы является теорема 2.

Теорема 2. *Пусть G — $\overline{FC}$-группа, обладающая бикомпактной открытой подгруппой H. Тогда множество $P(G)$ всех бикомпактных элементов группы G образует открытую характеристическую подгруппу (периодическая часть G), фактор-группа по которой является дискретной абелевой группой без кручения.*

Доказательство. Пусть $b_1, b_2 \in P(G)$. По лемме, b_1 содержится в бикомпактном нормальном делителе B_1 группы G, b_2 — в бикомпактном нормальном делителе B_2. Тогда $b_1 b_2$ содержится в бикомпактном нормальном делителе $B_1 B_2$, откуда $b_1 b_2 \in P(G)$. Очевидно, далее, что $H \subseteq P(G)$. Поэтому подгруппа $P(G) = \bigcup\limits_{x \in P(G)} xH$ открыта.

Рассмотрим фактор-группу $G/P(G)$. Она дискретна. Докажем, что $G/P(G)$ является группой без кручения. Допустим, что для некоторого элемента $g \in G$ найдется такое n, что $g^n \in P(G)$. Так как $P(G)$— нормальный делитель G, то $S_{g^n} \subseteq P(G)$. Следовательно, S_{g^n} — периодическое инвариантное множество. Его замыкание $F = \overline{S}_{g^n}$ бикомпактно, и мы можем применить лемму, на основании которой заключаем, что g^n содержится в бикомпактном нормальном делителе $N = \overline{\{F\}}$ группы G. Пусть $G^* = G/N$ и $g^* = gN$. Тогда подгруппа $\{g^*\}$ этой группы конечна и, значит, бикомпактна. Полный прообраз P этой подгруппы в G бикомпактен ([1], § 19, I). Так как $\{g\} \subseteq P$, то $\{g\}$ — бикомпактная подгруппа группы G, то есть $g \in P(G)$.

Итак, $G/P(G)$ — дискретная группа без кручения. Будучи $\overline{FC}$-группой, она обладает конечными классами сопряженных элементов. В силу известного результата Б. Неймана из [3] о дискретных FC-группах без кручения, $G/P(G)$ коммутативна.

В случае дискретных групп доказанная теорема превращается в теорему 5.1 из [3].

Следствие. *Коммутант $\overline{FC}$-группы, обладающей бикомпактной открытой подгруппой, периодичен.*

Для дискретных групп справедлива следующая теорема [4]:

группа G тогда и только тогда обладает конечными классами сопряженных элементов, когда она является расширением центральной подгруппы без кручения с помощью локально нормальной группы.

Как показывает построенный нами пример, эту теорему нельзя перенести на топологические $\overline{FC}$-группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Изд. 2-е, Москва, Гостехиздат, 1954.
2. R. Baer, Finiteness properties of groups, Duke Math. J., 15, 1948, 1021—1032.
3. B. Neumann, Groups with finite classes of conjugate elements, Proc. Lond. Math. Soc., 1, 1951, 178—187.
4. С. Н. Черников, О строении групп с конечными классами сопряженных элементов, ДАН СССР, т. 115, 1957, 60—63.
5. А. Г. Курош, Теория групп, Изд. 2-е, Москва, Гостехиздат, 1953.
6. А. Г. Курош, Силовские подгруппы нульмерных топологических групп, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 9, 1945, 65—78.
7. В. М. Глушков, К теории нильпотентных локально бикомпактных групп, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, 1956, 513—546.
8. В. М. Глушков, Локально бикомпактные группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп, УМЖ, т. 8, 1956, 135—139.

Поступила 14.V 1960 г.
Москва

Classes of conjugate elements in topological groups

V. I. Ushakov

Summary

The author considers the classes of conjugate elements in topological groups.

Definition. A topological group is called an $\overline{\text{FC}}$-group, if the closure of every class of conjugate elements is compact, and one locally normal if everyone of its elements is contained in a compact invariant subgroup.

Each locally normal group G is obviously a periodic * $\overline{\text{FC}}$-group. The converse assertion is proved in this paper for groups with an open compact subgroup.

The main result is the following.

Theorem. Let G be an $\overline{\text{FC}}$-group with an open compact subgroup. Then the set of all compact elements of G generates an open invariant subgroup $P(G)$; the factor-group $G/P(G)$ is a discrete torsion-free Abelian group.

* I. e. every element of G is contained in a compact subgroup.