# ОТДЕЛ КРАТКИХ СООБЩЕНИЙ

## О плотности вероятности перехода для решений стохастических уравнений высших порядков

*Гань Чжань-цюань*

В настоящей статье рассматриваются стохастические дифференциальные уравнения высших порядков. Такие дифференциальные уравнения первого порядка рассматривались в работе Ито [1]. В работе при некоторых предположениях устанавливается существование плотности вероятности перехода для решения стохастического уравнения и находится выражение для этой плотности в виде математического ожидания некоторого функционала от винеровского процесса. Аналогичная задача в одномерном случае рассмотрена А. В. Скороходом в [2].

1. Будем рассматривать марковские процессы $y(t)$, определенные на $[t_0, T]$. Определяться эти процессы будут с помощью уравнения

$$dy^{(m-1)}(t)=a(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(m-1)}(t))dt+\sigma(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(m-1)}(t))dw(t).$$

В этом уравнении $y(t)$ — неизвестная функция, $y^{(i)}(t)$ — ее производная $i$-го порядка; $w(t)$ — одномерный винеровский процесс, т. е. однородный процесс с независимыми приращениями, для которого $\boldsymbol{M}w(t)=0$, $\boldsymbol{D}w(t)=t$; $a(t, x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$ и $\sigma(t, x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$ — измеримые функции ($t_0 \leqslant t \leqslant T$, $-\infty < x_i < \infty$). Сведем это уравнение к системе уравнений

$$\begin{aligned} &dy(t) = y^{(1)}(t)dt,\\ &dy^{(1)}(t)=y^{(2)}(t)dt,\\ &\quad\vdots\\ &dy^{(m-1)}(t) =a(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(m-1)}(t))dt+\sigma(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(m-1)}(t))dw(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Обозначим через $(y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$ случайный вектор начальных условий, при которых решается система уравнений. Тогда методом последовательных приближений [1] можно доказать, что система уравнений (1) имеет единственное решение $(y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(m-1)}(t))$, с вероятностью 1 непрерывное, являющееся процессом Маркова и такое, что $(y(t_0), y^{(1)}(t_0), \dots, y^{(m-1)}(t_0)) = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$, если выполнены следующие условия:

а) существует $K$ такое, что при всех $x_i$ и $z_i$

$$|a(t, x_0, \dots, x_{m-1})-a(t, z_0, \dots, z_{m-1})|+|\sigma(t, x_0, \dots, x_{m-1})-$$
$$-\sigma(t, z_0, \dots, z_{m-1})|\leqslant K\sum_{i=0}^{m-1}|x_i-z_i|;$$

б) при некотором $K_1$ для всех $x_i$

$$|a(t, x_0, \dots, x_{m-1})| + |\sigma(t, x_0, \dots, x_{m-1})| \leqslant K_1(1 + x_0^2 + \dots + x_{m-1}^2)^{\frac{1}{2}};$$

в) $\boldsymbol{M}\{y_i^2\} < \infty$ при всех $i = 0, 1, \dots, m-1$ и вектор $(y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$ не зависит от процесса $w(t)$.

**2.** В этом пункте рассмотрим частный случай $\sigma = 1$. Уравнение примет вид

$$dy^{(m-1)}(t) = a(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(m-1)}(t))dt + dw(t). \tag{2}$$

Здесь предположим, что $a(t, x_0, \dots, x_{m-1})$ имеет непрерывные, ограниченные частные производные по всем переменным и выполнены условия а), в).

Введем вспомогательное уравнение

$$dz^{(m-1)}(t) = dw(t),$$

которое решается при тех же начальных условиях, как и у процесса $y(t)$, Обозначим через $\mathfrak{F}$ пространство всех функций, определенных на $[t_0, T]$ и принимающих значения из $m$-мерного евклидова пространства. Пусть $\mu_1$ — мера, соответствующая процессу $(y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(m-1)}(t))$ и $\mu_2$ — мера, соответствующая процессу $(z(t), z^{(1)}(t), \dots, z^{(m-1)}(t))$. Меры $\mu_1$ и $\mu_2$ определены на минимальном борелевском теле $\Gamma$ подмножеств пространства $\mathfrak{F}$, содержащем все цилиндрические множества, т. е. множества всех функций принимающих в точках $t_1, t_2, \dots, t_k \in [t_0, T]$ значения, принадлежащие $m$-мерным борелевским множествам $A_1, A_2, \dots, A_k$ того пространства, где происходят соответствующие процессы.

Повторяя рассуждения А. В. Скорохода из [3], можно доказать, что мера $\mu_1$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu_2$ и плотность $\mu_1$ по $\mu_2$ равняется

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(z(t), z^{(1)}(t), \dots, z^{(m-1)}(t)) = \exp\left\{\int_{t_0}^{T} a(t, z(t), \dots, z^{(m-1)}(t))\, dw(t) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} a^2(t, z(t), \dots, z^{(m-1)}(t))dt\right\}.$$

Здесь стохастический интеграл $\int_{t_0}^{T} a(t, z(t), \dots, z^{(m-1)}(t))dw(t)$ можно представить в виде обычного интеграла. Действительно, положим, что

$$F(t, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) = \int_0^{x_{m-1}} a(t, x_0, x_1, \dots, x_{m-2}, u)du.$$

По формуле стохастических интегралов [4] имеет место соотношение

$$dF(t, z(t), z^{(1)}(t), \dots, z^{(m-1)}(t)) = \frac{\partial}{\partial t} F(t, z(t), z^{(1)}(t), \dots, z^{(m-1)}(t))dt +$$
$$+ \sum_{i=0}^{m-2} \frac{\partial}{\partial x_i} F(t, z(t), \dots, z^{(m-1)}(t)) z^{(i+1)}(t)dt +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_{m-1}^2} F(t, z(t), \dots, z^{(m-1)}(t))dt + a(t, z(t), \dots, z^{(m-1)}(t))dw(t).$$

Отсюда следует

$$\int_{t_0}^{T} a(t, z(t), \ldots, z^{(m-1)}(t))dw(t) = F(T, z(T), \ldots, z^{(m-1)}(T)) -$$

$$- F(t_0, z(t_0), \ldots, z^{(m-1)}(t_0)) - \int_{t_0}^{T} \left[ \frac{\partial}{\partial t} F(t, z(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)) + \right.$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-2} \frac{\partial}{\partial x_i} F(t, z(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)) z^{(i+1)}(t) +$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_{m-1}^2} F(t, z(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)) \right] dt.$$

Поэтому можно записать

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_2} (z(t), z^{(1)}(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)) = \exp \left\{ F(T, z(T), \ldots, z^{(m-1)}(T)) - \right.$$

$$\left. - F(t_0, z(t_0), \ldots, z^{(m-1)}(t_0)) - \int_{t_0}^{T} G(t, z(t), \ldots, z^{(m-1)}(t))dt \right\}, \qquad (3)$$

где

$$G(t, z(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)) = \frac{\partial}{\partial t} F(t, z(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-2} \frac{\partial}{\partial x_i} F(t, z(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)) z^{(i+1)}(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_{m-1}^2} F(t, z(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)) + a^2(t, z(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)) \right).$$

Заметим, что для всякого множества $\gamma \in \Gamma$ будет иметь место соотношение

$$P\{(y(t), y^{(1)}(t), \ldots, y^{(m-1)}(t)) \in \gamma\} =$$

$$= \boldsymbol{M} \chi_\gamma(z(t), z^{(1)}(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)) \frac{d\mu_1}{d\mu_2} (z(t), z^{(1)}(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)), \qquad (4)$$

где $P\{\ \}$ означает вероятность, $\chi_\gamma$ — характеристическая функция множества $\gamma$. Соотношение (4) дает возможность вычислить плотность вероятности перехода для процесса $(y(t), y^{(1)}(t), \ldots, y^{(m-1)}(t))$.

3. Найдем теперь выражение для плотности вероятности перехода процесса $(y(t), y^{(1)}(t), \ldots, y^{(m-1)}(t))$, являющееся решением (2), от $t_0$ до $T$. Ввиду (4) имеем

$$P\{(y(T), \ldots, y^{(m-1)}(T)) \in A / y(t_0) = y_0, y^{(1)}(t_0) = y_1, \ldots, y^{(m-1)}(t_0) = y_{m-1}\} =$$

$$= \boldsymbol{M} \chi_A(z(T), \ldots, z^{(m-1)}(T)) \frac{d\mu_1}{d\mu_2} (z(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)) =$$

$$= \boldsymbol{M}\{\boldsymbol{M}[\chi_A(z(T), \ldots, z^{(m-1)}(T)) \frac{d\mu_1}{d\mu_2} (z(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)) / z(T), \ldots, z^{(m-1)}(T)]\} =$$

$$= \boldsymbol{M}\{\chi_A(z(T), \ldots, z^{(m-1)}(T)) \boldsymbol{M} \left[ \frac{d\mu_1}{d\mu_2} (z(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)) / z(T), \ldots, z^{(m-1)}(T) \right]\},$$

где $A$ — $m$-мерное борелевское множество. Так как $z(t)$ определяется с помощью уравнения

$$dz^{(m-1)}(t) = dw(t),$$

то легко убедиться, что $(z(t), z^{(1)}(t), \ldots, z^{(m-1)}(t))$ распределены нормально при $t \in [t_0, T]$ и нетрудно вычислить ($z(t)$ обозначается через $z^{(0)}(t)$) моменты

$$a_i(t) = Mz^{(i)}(t) = y_i + y_{i+1}(t - t_0) + \frac{y_{i+2}}{2!}(t - t_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{y_{m-1}}{(m-i-1)!}(t - t_0)^{m-i-1},$$

$$b_{ij}(t) = \boldsymbol{M}(z^{(i)}(t) - \boldsymbol{M}z^{(i)}(t))(z^{(j)}(t) - \boldsymbol{M}z^{(j)}(t)) =$$

$$= \frac{(t - t_0)^{2m-i-j-1}}{(m-i-1)!\,(m-j-1)!\,(2m-i-j-1)} \quad (i,\ j = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Ясно, что совместная плотность распределения вероятностей для $(z(T), z^{(1)}(T), \ldots, z^{(m-1)}(T))$ будет равняться

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) = \frac{|c_{ij}|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{m/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,\,j=0}^{m-1} c_{ij}(x_i - a_i(T))\,(x_j - a_j(T))},$$

где матрица $[c_{ij}]$ с определителем $|c_{ij}|$ является обратной к матрице $[b_{ij}(T)]$ Положим

$$\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) = \boldsymbol{M}\left\{\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(z(t), \ldots, z^{(m-1)}(t))/z(T) =\right.$$

$$\left. = x_0, \ldots, z^{(m-1)}(T) = x_{m-1}\right\}. \tag{5}$$

Тогда получим

$$P\{(y(T), \ldots, y^{(m-1)}(T)) \in A / y(t_0) = y_0,\ y^{(1)}(t_0) = y_1, \ldots, y^{(m-1)}(t_0) = y_{m-1}\} =$$

$$= \iint\limits_{A} \ldots \int f(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})dx_0 dx_1 \ldots dx_{m-1}.$$

Следовательно, функция $f(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$ будет искомой плотностью перехода. Из (5) видим, что $\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$ — условное математическое ожидание. Постараемся превратить его в функцию как безусловное математическое ожидание некоторого функционала.

Заметим следующее: если $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1})$ и $(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{m-1})$ — два независимых случайных вектора и $\Phi(X, Y)$ — некоторая измеримая функция от двух переменных векторов, то имеет место равенство

$$\boldsymbol{M}\{\Phi((\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}), (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{m-1}))/(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{m-1}) =$$

$$= (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})\} = \boldsymbol{M}\Phi((\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}), (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})). \tag{6}$$

Пользуясь этим фактом, можем представить функцию $\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$ как безусловное математическое ожидание функционала. Действительно, определим процесс $(\xi_0(t), \xi_1(t), \ldots, \xi_{m-1}(t))$ с помощью равенств

$$\xi_i(t) = z^{(i)}(t) - a_i(t) - \sum_{k=0}^{m-1}[\alpha_{ik}(t)(z^{(k)}(T) - a_k(T))] =$$

$$= \int_{t}^{t} \frac{(t-s)^{m-i-2}}{(m-i-2)!} w(s)ds - \sum_{k=0}^{m-1}[\alpha_{ik}(t)(z^{(k)}(T) - a_k(T))]\ (i = 0, 1, \ldots, m-1),$$

где $\alpha_{ik}$ $(i,\ k=0,\ 1,\ldots,\ m-1)$ являются решением системы алгебраических уравнений (ясно, что она разрешима при $T>t_0$)

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(T-t_0)^{2m-j-k-1}}{(m-j-1)!\,(m-k-1)!\,(2m-j-k-1)}\,\alpha_{ik}(t)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\frac{t-s^{m-i-1}(T-s)^{m-j-1}}{(m-i-1)!(m-j-1)!}ds\ (i,\ j=0,\ 1,\ldots,\ m-1).$$

Тогда $z^{(i)}(t)=\xi_i(t)+a_i(t)+\sum\limits_{k=0}^{m-1}\alpha_{ik}(t)(z^{(k)}(T)-a_k(T))$.

Можно проверить, что $(\xi_0(t),\ \xi_1(t),\ldots,\ \xi_{m-1}(t))$ не зависит от $(z(T),\ z^{(1)}(T),\ldots,\ z^{(m-1)}(T))$. Следовательно, из (3), (5) и (6) вытекает, что

$$\lambda(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{m-1})=\exp\{F(T,\ x_0,\ldots,\ x_{m-1})-F(t_0,\ y_0,\ldots,\ y_{m-1})\}\times$$

$$\times\,\boldsymbol{M}\exp\left\{-\int_{t_0}^{T}G\Big(t,\ \xi_0(t)+a_0(t)+\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{0k}(t)(x_k-a_k(T)),\ \ldots,\ \xi_{m-1}(t)+a_{m-1}(t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{m-1,\,k}(t)(x_k-a_k(T)\Big)dt\right\}.$$

Окончательно, искомой плотностью вероятности перехода для процесса $(y(t),\ y^{(1)}(t),\ldots,\ y^{(m-1)}(t))$ от $t_0$ до $T$ будет

$$p(t_0,\ (y_0,\ y_1,\ldots,\ y_{m-1});\ T,\ (x_0,\ x_1,\ldots,\ x_{m-1}))=$$

$$=\frac{|c_{ij}|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{m/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,\ j=0}^{m-1}c_{ij}(x_i-a_i(T))(x_j-a_j(T))+F(T,\ x_0,\ldots,\ x_{m-1})-\right.$$

$$\left.-F(t_0,\ y_0,\ldots,\ y_{m-1})\right\}\times\boldsymbol{M}\exp\left\{-\int_{t_0}^{T}G\Big(t,\ \xi_0(t)+a_0(t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{0k}(t)(x_k-a_k(T)),\ldots,\ \xi_{m-1}(t)+a_{m-1}(t)+\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{m-1,\,k}(t)(x_k-a_k(T)\Big)dt\right\}.$$

Настоящая работа выполнена автором под руководством А. В. Скорохода, кому автор считает своим приятным долгом выразить сердечную благодарность за предложенную тему и постоянную помощь.

## ЛИТЕРАТУРА

1. K. Ito, On a stochastic differential equations, Mem. Amer. Math. Sos., 4, 1951.

2. А. В. Скороход, Про щільність розподілу розв'язків стохастичних рівнянь, Вісник КДУ, № 3, в. 1, 1961.

3. А. В. Скороход, О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам, II, Марковские процессы, Теория вероятностей и ее применения, V. 3, 1960.

4. K. Ito, On a formula concerning stochastic differentials, Nogoya Math. J., V. 3, 1951.

Поступила 9. V 1961 г.
Киев