Асимптотическое поведение линейных систем в случае кратных корней характеристического уравнения

Н. И. Шкиль

1. Построение асимптотического решения для дифференциальных уравнений с параметром зависит от поведения корней характеристического уравнения. Случай простых корней и частично случай кратных корней рассмотрен Я. Д. Тамаркиным [1]. С. Ф. Фещенко [2] удалось расщепить систему на две системы низшего порядка при любом поведении корней характеристического уравнения. Такое расщепление в гильбертовом пространстве получено Ю. Л. Далецким и С. Г. Крейном [3, 4]. Для нелинейных уравнений следует отметить исследования Ю. А. Митропольского [5, 6].

В настоящей работе обобщаются результаты, изложенные автором в работе [7].

2. Рассмотрим в конечно-мерном пространстве систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)e^{i\theta}. \tag{1}$$

Здесь действительная матрица $A(\tau, \varepsilon)$ и вектор $B(\tau, \varepsilon)$ допускают представление

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A^{(s)}(\tau), \quad B(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B^{(s)}(\tau), \tag{2}$$

где $0 \leqslant \tau = \varepsilon t \leqslant L$, ε — малый действительный параметр.

Пусть корень $\lambda_1(\tau)$ характеристического уравнения

$$\det \| A^{(0)}(\tau) - \lambda E \| = 0 \tag{3}$$

чисто мнимый и обладает постоянной k-й кратностью.

Тогда, как известно, этому корню могут соответствовать как кратный, так и простой элементарные делители.

Мы будем рассматривать как более сложный случай кратного элементарного делителя той же кратности, что и $\lambda_1(\tau)$.

Следует отметить, что среди корней уравнения (3) имеется корень, сопряженный с корнем $\lambda_1(\tau)$, той же кратности, что и $\lambda_2(\tau)$.

Остальные корни уравнения (3) могут быть как простые, так и кратные.

Тогда существует неособая матрица $T(\tau)$ такая, что

$$T^{-1}(\tau)A^{(0)}(\tau)T(\tau) = W(\tau) = \left\| \begin{matrix} W_1(\tau), & 0 \\ 0, & W_2(\tau) \end{matrix} \right\|, \tag{4}$$

где $W_1(\tau)$ — квадратная матрица k-го порядка вида

$$[A(\tau, \mu^k) - i\nu(\tau)E]P(\tau, \mu) = \mu^k[\overset{\tau}{P}(\tau, \mu) - B(\tau, \mu^k)] + U(\tau, \mu)z(\tau, \mu), \quad (13)$$

где $\overset{\tau}{U}'(\tau, \mu)$, $\overset{\tau}{P}'(\tau, \mu)$ — производные по τ.

4. Воспользуемся сначала соотношением (12). Приравнивая в нем коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ, получим уравнения для определения векторов $U^{(j)}(\tau)$ и функций $\lambda^{(j+1)}(\tau)$, $j = 0, 1, \ldots$.

Итак, приравнивая в соотношении (12) коэффициенты при μ°, получаем уравнение

$$[A^{(0)}(\tau) - \lambda_1(\tau)E]U^{(0)}(\tau) = 0. \quad (14)$$

Тогда, вводя в рассмотрение вектор

$$Q^{(j)}(\tau) = T^{-1}(\tau)\ U^{(j)}(\tau),\ j = 0, 1, \ldots, \quad (15)$$

уравнение (14) можно записать в виде

$$[W(\tau) - \lambda_1(\tau)E]Q^{(0)}(\tau) = 0. \quad (16)$$

Так как $W(\tau)$ имеет вид (4), то уравнение (16) распадается на два уравнения:

$$[W_1(\tau) - \lambda_1(\tau)E]\,\overline{Q}^{(0)}(\tau) = 0, \quad (17)$$

$$[W_2(\tau) - \lambda_1(\tau)E\,]\overline{\overline{Q}}^{(0)}(\tau) = 0, \quad (18)$$

где $\overline{Q}^{(0)}(\tau)$ — вектор k-й размерности с компонентами $\{q^{(0)}(\tau)\}_1, \ldots, \{q^{(0)}(\tau)\}_k$, $\overline{\overline{Q}}^{(0)}(\tau)$ — вектор размерности $n-k$, компоненты которого равны $\{q^{(0)}(\tau)\}_{k+1}, \ldots, \{q^{(0)}(\tau)\}_n$*.

Раскрывая векторное уравнение (17), находим

$$\{q^{(0)}(\tau)\}_r = 0,\ r = 2, 3, \ldots, k. \quad (19)$$

Компонента $\{q^{(0)}(\tau)\}_1$ остается произвольной. Положим ее равной единице. Так как

$$\det|W_2(\tau) - \lambda_1(\tau)E| \neq 0 \quad (20)$$

при всех $\tau \in [0, L]$, то из (18) следует, что

$$\overline{\overline{Q}}^{(0)}(\tau) = 0. \quad (21)$$

Зная вектор $Q^{(0)}(\tau)$, из (15) можно определить вектор $U^{(0)}(\tau)$.

Перейдем к определению вектора $U^{(1)}(\tau)$ и функции $\lambda^{(1)}(\tau)$. Для этой цели в соотношении (12) сравним коэффициенты при μ^1. Получим

$$[W(\tau) - \lambda_1(\tau)E]\,Q^{(1)}(\tau) = Q^{(0)}(\tau)\lambda^{(1)}(\tau). \quad (22)$$

Согласно (4), (21) уравнение (22) может быть расщеплено на два уравнения:

$$[W_1(\tau) - \lambda_1(\tau)E]\,\overline{Q}^{(1)}(\tau) = \overline{Q}^{(0)}(\tau)\lambda^{(1)}(\tau), \quad (23)$$

$$[W_2(\tau) - \lambda_1(\tau)\,E]\overline{\overline{Q}}^{(1)}(\tau) = 0. \quad (24)$$

Следовательно,

$$\overline{\overline{Q}}^{(1)}(\tau) = 0. \quad (25)$$

Записывая уравнение (23) в координатной форме, получаем

$$\{q^{(1)}(\tau)\}_2 = \lambda^{(1)}(\tau), \quad (26)$$

$$\{q^{(1)}(\tau)\}_r = 0,\ r = 3, 4, \ldots, k.$$

---

* Компоненты вектора мы будем обозначать соответствующей маленькой буквой, заключая ее в фигурные скобки.

Компонента $\{q^{(1)}(\tau)\}_1$ произвольная. Положим ее равной нулю. Приравняем теперь в соотношении (12) коэффициенты при μ^2. Получим

$$[W(\tau)-\lambda_1(\tau)E]Q^{(2)}(\tau)=Q^{(1)}(\tau)\lambda^{(1)}(\tau)+Q^{(0)}(\tau)\lambda^{(2)}(\tau).^{*} \tag{27}$$

Уравнение (27) может быть представлено в виде

$$[W_1(\tau)-\lambda_1(\tau)E]\overline{Q}^{(2)}(\tau)=\overline{Q}^{(1)}(\tau)\lambda^{(1)}(\tau)+\overline{Q}^{(0)}(\tau)\lambda^{(2)}(\tau), \tag{28}$$

$$[W_2(\tau)-\lambda_1(\tau)E]\overline{\overline{Q}}^{(2)}(\tau)=0. \tag{29}$$

Из (29) имеем

$$\overline{\overline{Q}}^{(2)}(\tau)=0. \tag{30}$$

Раскрывая уравнение (28), находим

$$\begin{aligned}&\{q^{(2)}(\tau)\}_2=\lambda^{(2)}(\tau),\\&\{q^{(2)}(\tau)\}_3=\{q^{(1)}(\tau)\}_2\lambda^{(1)}(\tau)=[\lambda^{(1)}(\tau)]^2,\\&\{q^{(2)}(\tau)\}_r=0,\ r=4,5,\ldots,k.\end{aligned} \tag{31}$$

Компонента $\{q^{(2)}(\tau)\}_1$ произвольная. Положим ее равной нулю. Приравнивая в соотношении (12) коэффициенты при μ^3, имеем

$$[W(\tau)-\lambda_1(\tau)E]Q^{(3)}(\tau)=\sum_{s=0}^{2}Q^{(2-s)}(\tau)\lambda^{(s+1)}(\tau) \tag{32}$$

или

$$[W_1(\tau)-\lambda_1(\tau)E]\overline{Q}^{(3)}(\tau)=\sum_{s=0}^{2}\overline{Q}^{(2-s)}(\tau)\,\lambda^{(s+1)}(\tau), \tag{33}$$

$$[W_2(\tau)-\lambda_1(\tau)E]\overline{\overline{Q}}^{(3)}(\tau)=0. \tag{34}$$

Записывая векторное уравнение (33) в координатной форме, получаем

$$\begin{aligned}&\{q^{(3)}(\tau)\}_2=\lambda^{(3)}(\tau),\\&\{q^{(3)}(\tau)\}_3=\{q^{(2)}(\tau)\}_2\lambda^{(1)}(\tau)+\{q^{(1)}(\tau)\}_2\lambda^{(2)}(\tau)=2\lambda^{(1)}(\tau)\lambda^{(2)}(\tau),\\&\{q^{(3)}(\tau)\}_4=\{q^{(2)}(\tau)\}_3\lambda^{(1)}(\tau)=[\lambda^{(1)}(\tau)]^3,\\&\{q^{(3)}(\tau)\}_r=0,\ r=5,6,\ldots,k.\end{aligned} \tag{35}$$

Система (34) имеет нулевое решение

$$\overline{\overline{Q}}^{(3)}(\tau)=0. \tag{36}$$

Компоненту $\{q^{(3)}(\tau)\}_1$ положим равной нулю.

Путем приравнивания в соотношении (12) коэффициентов при μ^4, $\mu^5,\ldots$, μ^{k-1} по методу индукции могут быть доказаны следующие формулы

$$\begin{aligned}&\{q^{(k-1)}(\tau)\}_k=[\lambda^{(1)}(\tau)]^{k-1},\\&\{q^{(k-1-s)}(\tau)\}_k=0,\ 1\leqslant s\leqslant k-1.\end{aligned} \tag{37}$$

Тогда, приравнивая в соотношении (12) коэффициенты при μ^k, находим

$$[W(\tau)-\lambda_1(\tau)E]\,Q^{(k)}(\tau)=\sum_{s=0}^{k-1}Q^{(k-1-s)}(\tau)\,\lambda^{(1+s)}(\tau)+V^{(k)}(\tau), \tag{38}$$

где

$$V^{(k)}(\tau)=T^{-1}(\tau)[\overset{\tau}{U}{}'^{(0)}(\tau)-A^{(1)}(\tau)U^{(0)}(\tau)]. \tag{39}$$

* Если $k=2$, то в правой части соотношения (27) появится вектор $T^{-1}(\tau)[\overset{\tau}{U}{}'^{(0)}(\tau)-A^{(1)}(\tau)U^{(0)}(\tau)]$.

Уравнение (38) можно заменить эквивалентной системой двух уравнений:

$$[W_1(\tau) - \lambda_1(\tau)E]\,\overline{Q}^{(k)}(\tau) = \sum_{s=0}^{k-1} \overline{Q}^{(k-1-s)}(\tau)\,\lambda^{(s+1)}(\tau) + \overline{V}^{(k)}(\tau), \tag{40}$$

$$[W_2(\tau) - \lambda_1(\tau)E]\,\overline{\overline{Q}}^{(k)}(\tau) = \overline{\overline{V}}^{(k)}(\tau). \tag{41}$$

Принимая во внимание (20), из (41) находим

$$\overline{\overline{Q}}^{(k)}(\tau) = [W_2(\tau) - \lambda_1(\tau)\,E]^{-1}\overline{\overline{V}}^{(k)}(\tau). \tag{42}$$

Переходя в уравнении (41) к координатной форме, получаем

$$\{q^{(k)}(\tau)\}_2 = \lambda^{(k)}(\tau) + \{v^{(k)}(\tau)\}_1,$$

$$\{q^{(k)}(\tau)\}_i = \sum_{s=0}^{k-1} \{q^{(k-1-s)}(\tau)\}_{i-1}\,\lambda^{(s+1)}(\tau) + \{v^{(k)}(\tau)\}_{i-1},\ 3 \leqslant i \leqslant k, \tag{43}$$

$$\sum_{s=0}^{k-1} \{q^{(k-1-s)}(\tau)\}_k \lambda^{(s+1)}(\tau) + \{v^{(k)}(\tau)\}_k = 0. \tag{44}$$

Согласно (37) уравнение (44) принимает вид:

$$[\lambda^{(1)}(\tau)]^k + \{v^{(k)}(\tau)\}_k = 0. \tag{45}$$

Откуда

$$\lambda^{(1)}(\tau) = \sqrt[k]{-\{v^{(k)}(\tau)\}_k}\,. \tag{46}$$

Для определения функции $\lambda^{(2)}(\tau)$ приравняем в соотношении (12) коэффициенты при μ^{k+1}. Получим

$$[W(\tau) - \lambda_1(\tau)E]\,Q^{(k+1)}(\tau) = \sum_{s=0}^{k} Q^{(k-s)}(\tau)\lambda^{(1+s)}(\tau) + V^{(k+1)}(\tau), \tag{47}$$

где

$$V^{(k+1)}(\tau) = T^{-1}(\tau)[\overset{\tau}{U}{}'^{(1)}(\tau) - A^{(1)}(\tau)U^{(1)}(\tau)]. \tag{48}$$

Заменим уравнение (47) двумя уравнениями:

$$[W_1(\tau) - \lambda_1(\tau)E]\,\overline{Q}^{(k+1)}(\tau) = \sum_{s=0}^{k} \overline{Q}^{(k-s)}(\tau)\lambda^{(1+s)}(\tau) + \overline{V}^{(k+1)}(\tau), \tag{49}$$

$$[W_2(\tau) - \lambda_1(\tau)E]\,\overline{\overline{Q}}^{(k+1)}(\tau) = \overline{\overline{Q}}^{(k)}(\tau)\lambda^{(1)}(\tau) + \overline{\overline{V}}^{(k+1)}(\tau). \tag{50}$$

Из уравнения (50) находим

$$\overline{\overline{Q}}^{(k+1)}(\tau) = [W_2(\tau) - \lambda_1(\tau)E]^{-1}[\overline{\overline{Q}}^{(k)}(\tau)\lambda^{(1)}(\tau) + \overline{\overline{V}}^{(k+1)}(\tau)]. \tag{51}$$

Переходя в уравнении (49) к координатной форме, получаем

$$\{q^{(k+1)}(\tau)\}_2 = \lambda^{(k+1)}(\tau) + \{v^{(k+1)}(\tau)\}_1,$$

$$\{q^{(k+1)}(\tau)\}_i = \sum_{s=0}^{k} \{q^{(k-s)}(\tau)\}_{i-1}\,\lambda^{(s+1)}(\tau) + \{v^{(k+1)}(\tau)\}_{i-1},\ 3 \leqslant i \leqslant k \tag{52}$$

$$\sum_{s=0}^{k} \{q^{(k-s)}(\tau)\}_k\,\lambda^{(s+1)}(\tau) + \{v^{(k+1)}(\tau)\}_k = 0. \tag{53}$$

Уравнение (53) на основании (37) можно записать в виде

$$\{q^{(k)}(\tau)\}_k\lambda^{(1)}(\tau) + [\lambda^{(1)}(\tau)]^{k-1}\lambda^{(2)}(\tau) + \{v^{(k+1)}(\tau)\}_k = 0. \qquad (54)$$

Из соотношения (43) находим

$$\{q^{(k)}(\tau)\}_k = \{q^{(k-1)}(\tau)\}_{k-1}\lambda^{(1)}(\tau) + \{v^{(k)}(\tau)\}_{k-1} + \{q^{(k-2)}(\tau)\}_{k-1}\lambda^{(2)}(\tau). \qquad (55)$$

Так как $\{q^{(2)}(\tau)\}_2 = \lambda^{(2)}(\tau)$ то, применяя рекуррентную формулу

$$\{q^{(k-1)}(\tau)\}_{k-1} = \{q^{(k-2)}(\tau)\}_{k-2}\lambda^{(1)}(\tau) + \{q^{(k-3)}(\tau)\}_{k-2}\lambda^{(2)}(\tau) \qquad (56)$$

и учитывая, что

$$\{q^{(k-3)}(\tau)\}_{k-2} = [\lambda^{(1)}(\tau)]^{k-3}, \qquad (57)$$

имеем

$$\{q^{(k)}(\tau)\}_k = (k-1)[\lambda^{(1)}(\tau)]^{k-2}\lambda^{(2)}(\tau) + \{v^{(k)}(\tau)\}_{k-1}. \qquad (58)$$

Тогда, подставляя значение $\{q^{(k)}(\tau)\}_k$ в уравнение (54) и решая его относительно $\lambda^{(2)}(\tau)$, получаем

$$\lambda^{(2)}(\tau) = -\frac{\{v^{(k+1)}(\tau)\}_k + \{v^{(k)}(\tau)\}_{k-1}\lambda^{(1)}(\tau)}{k[\lambda^{(1)}(\tau)]^{k-1}}. \qquad (59)$$

Отметим, что знаменатель в последнем соотношении не обращается в нуль при любом $\tau\in[0, L]$, так как

$$\lambda^{(1)}(\tau) = \sqrt[k]{-\{v^{(k)}(\tau)\}_k} = \sqrt[k]{\left\{T^{-1}(\tau)\left[A^{(1)}(\tau)U^{(0)}(\tau) - \frac{dU^{(0)}(\tau)}{d\tau}\right]\right\}_k}. \qquad (60)$$

Подобным образом можно найти и все последующие функции $\lambda^{(3)}(\tau)$, $\lambda^{(4)}(\tau), \ldots$, а значит, и векторы $Q^{(3)}(\tau)$, $Q^{(4)}(\tau), \ldots$.

Найдем, например, функцию $\lambda^{(k)}(\tau)$. Для этого допустим, что функции $\lambda^{(1)}(\tau), \ldots, \lambda^{(k-1)}(\tau)$ уже известны, а с ними известны и векторы $Q^{(1)}(\tau), \ldots, Q^{(k-1)}(\tau)$, $\overline{\overline{Q}}^{(k)}(\tau), \ldots, \overline{\overline{Q}}^{(2k-2)}(\tau)$.

Тогда, приравнивая в соотношении (12) коэффициенты при μ^{2k-1} получаем

$$[W(\tau) - \lambda_1(\tau)E]Q^{(2k-1)}(\tau) = \sum_{s=0}^{2k-2} Q^{(2k-2-s)}(\tau)\lambda^{(1+s)}(\tau) + V^{(2k-1)}(\tau), \qquad (61)$$

где

$$V^{(2k-1)}(\tau) = T^{-1}(\tau)[\overset{\tau}{U}{}'^{(k-1)}(\tau) - A^{(1)}(\tau)U^{(k-1)}(\tau)]. \qquad (62)$$

Уравнение (61) расщепляется на два уравнения вида

$$[W_1(\tau) - \lambda_1(\tau)E]\overline{Q}^{(2k-1)}(\tau) = \sum_{s=0}^{2k-2}\overline{Q}^{(2k-2-s)}(\tau)\lambda^{(1+s)}(\tau) + \overline{V}^{(2k-1)}(\tau), \qquad (63)$$

$$[W_2(\tau) - \lambda_1(\tau)E]\overline{\overline{Q}}^{(2k-1)}(\tau) = \sum_{s=0}^{k-2}\overline{\overline{Q}}^{(2k-2-s)}(\tau)\lambda^{(1+s)}(\tau) + \overline{\overline{V}}^{(2k-1)}(\tau). \qquad (64)$$

Решая уравнение (64), находим

$$\overline{\overline{Q}}^{(2k-1)}(\tau) = [W_2(\tau) - \lambda_1(\tau)E]^{-1}\left[\sum_{s=0}^{k-2}\overline{\overline{Q}}^{(2k-2-s)}(\tau)\lambda^{(1+s)}(\tau) + \overline{\overline{V}}^{(2k-1)}(\tau)\right]. \qquad (65)$$

Запишем уравнение (63) в координатной форме:

$$\{q^{(2k-1)}(\tau)\}_i = \sum_{s=0}^{2k-2}\{q^{(2k-2-s)}(\tau)\}_{i-1}\lambda^{(1+s)}(\tau) + \{v^{(2k-1)}(\tau)\}_{i-1}, \quad 2\leqslant i\leqslant k \qquad (66)$$

$$\{q^{(2k-2)}(\tau)\}_k\lambda^{(1)}(\tau)+\{q^{(k-1)}(\tau)\}_k\lambda^{(k)}(\tau)+\sum_{s=1}^{k-2}\{q^{(2k-2-s)}(\tau)\}_k\,\lambda^{(s+1)}(\tau)+$$

$$+\{v^{(2k-1)}(\tau)\}_k=0. \qquad (67)$$

Применяя метод индукции, можно показать, что компоненты $\{q^{(2k-2-s)}(\tau)\}_k$ $(s=0,1,\ldots,k-2)$ выражаются через функции $\lambda^{(1)}(\tau)\,\lambda^{(2)}(\tau),\ldots,\lambda^{(k-1)}(\tau)$.

Установим рекуррентную формулу для компоненты $\{q^{(2k-2)}(\tau)\}_k$.

Для этого в тождестве (12) будем последовательно приравнивать коэффициенты при μ^k, $\mu^{k+1},\ldots,\mu^{2k-2}$. Вследствии этого получим следующие соотношения:

$$\{q^{(k)}(\tau)\}_2=\lambda^{(k)}(\tau)+\{v^{(k)}(\tau)\}_1,$$

$$\{q^{(k+1)}(\tau)\}_3=\sum_{s=0}^{k-1}\{q^{(k-s)}(\tau)\}_2\,\lambda^{(s+1)}(\tau)+\{v^{(k+1)}(\tau)\}_2,$$

$$\{q^{(k+2)}(\tau)\}_4=\sum_{s=0}^{k-1}\{q^{(k+1-s)}(\tau)\}_3\,\lambda^{1+s}(\tau)+\{v^{(k+2)}(\tau)\}_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\{q^{(2k-2)}(\tau)\}_k=\sum_{s=0}^{k-1}\{q^{(2k-3-s)}(\tau)\}_{k-1}\,\lambda^{(s+1)}(\tau)+\{v^{(2k-2)}(\tau)\}_{k-1}. \qquad (68)$$

Отсюда находим

$$\{q^{(2k-2)}(\tau)\}_k=(k-1)[\lambda^{(1)}(\tau)]^{k-2}\lambda^{(k)}(\tau)+\alpha(\tau), \qquad (69)$$

где

$$\alpha(\tau)=\sum_{j=0}^{k-3}\ \sum_{i_{k-2-j}=1}^{k-1}\ \sum_{i_{k-3-j}=1}^{k+1-i_{k-2-j}}\cdots$$

$$\cdots\sum_{i_{1-j}=1}^{2k-3-j-i_{k-2-j}-\ldots-i_{2-j}}\lambda^{(2k-2-j-i_{k-2}-\ldots-i_{1-j})}(\tau)\lambda^{(i_{k-2})}(\tau)\ldots$$

$$\ldots\lambda^{(i_{1-j})}(\tau)\,[\lambda^{(1)}(\tau)]^j+\sum_{s=1}^{k-1}\ \sum_{i_{k-2}=1}^{k}\ \sum_{i_{k-3}=1}^{k+1-i_{k-2}}\cdots$$

$$\cdots\sum_{i_s=1}^{2k-2-i_{k-2}-\ldots-s}\{v^{(2k-2-i_{k-2}-\ldots-i_s)}(\tau)\}_s\lambda^{(i_{k-2})}(\tau)\ldots\lambda^{(i_s)}(\tau). \qquad (70)$$

Тогда, из уравнения (67) получаем

$$\lambda^{(k)}(\tau)=-\frac{\alpha(\tau)\lambda^{(1)}(\tau)+\sum\limits_{s=1}^{k-2}\{q^{(2k-2-s)}(\tau)\}_k\lambda^{(s+1)}(\tau)+\{v^{(2k-1)}(\tau)\}_k}{k[\lambda^{(1)}(\tau)]^{k-1}}. \qquad (71)$$

5. Укажем способ определения векторов $P^{(s)}(\tau)$ и функции $z^{(s)}(\tau)$ $(s=0,1,\ldots)$. Для этого воспользуемся соотношением (13). Приравнивая в нем коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ, получим уравнения, из которых можно найти упомянутые величины.

В самом деле, приравнивая в соотношении (15) коэффициенты при μ^0, находим:

$$[A^{(0)}(\tau) - i\nu(\tau)E]\,P^{(0)}(\tau) = U^{(0)}(\tau)z^{(0)}(\tau). \tag{72}$$

Пусть

$$F^{(s)}(\tau) = T^{-1}(\tau)P^{(s)}(\tau),\ s = 0, 1, \ldots . \tag{73}$$

Тогда систему (72) можно записать следующим образом:

$$[W(\tau) - i\nu(\tau)E]F^{(0)}(\tau) = Q^{(0)}(\tau)z^{(0)}(\tau) \tag{74}$$

или

$$[W_1(\tau) - i\nu(\tau)E]\,\overline{F}^{(0)}(\tau) = \overline{Q}^{(0)}(\tau)\,z^{(0)}(\tau), \tag{75}$$

$$[W_2(\tau) - i\nu(\tau)E]\,\overline{\overline{F}}^{(0)}(\tau) = 0. \tag{76}$$

Согласно (7)

$$\det|\,W_2(\tau) - i\nu(\tau)E\,| \neq 0 \tag{77}$$

при любом $\tau\in[0, L]$. Поэтому из (76) находим

$$\overline{\overline{F}}^{(0)}(\tau) = 0. \tag{78}$$

В «резонансном» случае функция $i\nu(\tau)$ становится равной $\lambda_1(\tau)$ при некоторых значениях $\tau\in[0, L]$. Следовательно, система (75) в координатной форме может быть представлена в виде:

$$\{f^{(0)}(\tau)\}_2 = z^{(0)}(\tau),\ \ \{f^{(0)}(\tau)\}_j = 0,\ \ j = 3, 4, \ldots, k. \tag{79}$$

Компонента $\{f^{(0)}(\tau)\}_1$ остается произвольной. Ее можно положить равной нулю.

Приравняем в соотношении (13) коэффициенты при μ^1. Получим

$$[W_1(\tau) - i\nu(\tau)E]\,\overline{F}^{(1)}(\tau) = \overline{Q}^{(0)}(\tau)z^{(1)}(\tau) + \overline{Q}^{(1)}(\tau)\,z^{(0)}(\tau), \tag{80}$$

$$\overline{\overline{F}}^{(1)}(\tau) = 0. \tag{81}$$

Раскрывая уравнение (80), находим:

$$\{f^{(1)}(\tau)\}_2 = z^{(1)}(\tau),$$

$$\{f^{(1)}(\tau)\}_3 = \{q^{(1)}(\tau)\}_2 z^{(0)}(\tau),\ \ \{f^{(1)}(\tau)\}_j = 0,\ j = 4, \ldots, k. \tag{82}$$

Ввиду произвольности $\{f^{(1)}(\tau)\}_1$, положим ее равной нулю. Приравняем в соотношении (13) коэффициенты при μ^{k-1}. Получим

$$[W_1(\tau) - i\nu(\tau)E]\,\overline{F}^{(k-1)}(\tau) = \overline{Q}^{(0)}(\tau)z^{(k-1)}(\tau) + \sum_{s=1}^{k-1}\overline{Q}^{(s)}(\tau)z^{(k-1-s)}(\tau), \tag{83}$$

$$\overline{\overline{F}}^{(k-1)}(\tau) = 0. \tag{84}$$

Учитывая вид матриц $\overline{Q}^{(s)}(\tau)$ $(s = 0, 1, \ldots, k-1)$, из уравнения (83) получим

$$\{f^{(k-1)}(\tau)\}_2 = z^{(k-1)}(\tau),$$

$$\{f^{(k-1)}(\tau)\}_j = \sum_{s=1}^{k-1}\{q^{(s)}(\tau)\}_{j-1}\,z^{(k-1-s)}(\tau),\ \ 3 \leqslant j \leqslant k, \tag{85}$$

$$\sum_{s=1}^{k-1}\{q^{(s)}(\tau)\}_k z^{(k-1-s)}(\tau) = 0; \tag{86}$$

$\{f^{(k-1)}(\tau)\}_1$ произвольная, положим ее равной нулю. Согласно (37) уравнение (86) может быть представлено в виде

$$[\lambda^{(1)}(\tau)]^{k-1} z^{(0)}(\tau) = 0. \tag{87}$$

Отсюда

$$z^{(0)}(\tau) = 0. \tag{88}$$

Следовательно, из (73), (78), (79) имеем, что

$$P^{(0)}(\tau) = 0. \tag{89}$$

Для определения функции $z^{(1)}(\tau)$ приравняем в соотношении (13) коэффициенты при μ^k. Получим

$$[W(\tau) - i\nu(\tau)E]F^{(k)}(\tau) = Q^{(0)}(\tau) z^{(k)}(\tau) + \sum_{s=1}^{k-1} Q^{(s)}(\tau) z^{(k-s)}(\tau) + \Pi^{(k)}(\tau), \tag{90}$$

где

$$\Pi^{(k)}(\tau) = - T^{-1}(\tau) B^{(0)}(\tau). \tag{91}$$

Тогда, раскрывая уравнение (90), получим

$$\{f^{(k)}(\tau)\}_2 = z^{(k)}(\tau) + \{p^{(k)}(\tau)\}_1,$$

$$\{f^{(k)}(\tau)\}_j = \sum_{s=1}^{k-1} \{q^{(s)}(\tau)\}_{j-1} z^{(k-s)}(\tau) + \{p^{(k)}(\tau)\}_{j-1}, \quad 3 \leqslant j \leqslant k, \tag{92}$$

$$\sum_{s=1}^{k-1} \{q^{(s)}(\tau)\}_k z^{(k-s)}(\tau) + \{p^{(k)}(\tau)\}_k = 0, \tag{93}$$

$$\overline{\overline{F}}^{(k)}(\tau) = [W_2(\tau) - i\nu(\tau)E]^{-1} \overline{\overline{\Pi}}^{(k)}(\tau). \tag{94}$$

Учитывая (37), из (93) находим

$$z^{(1)}(\tau) = - \frac{\{p^{(k)}(\tau)\}_k}{[\lambda^{(1)}(\tau)]^{k-1}}. \tag{95}$$

Зная $z^{(1)}(\tau)$, из (82) можно найти $\overline{F}^{(1)}(\tau)$, а следовательно, и $P^{(1)}(\tau)$.

Приравнивая в соотношении (13) последовательно коэффициенты при μ^{k+1}, $\mu^{k+2}, \ldots$, мы каждый раз будем соответственно определять функции $z^{(2)}(\tau)$, $z^{(3)}(\tau), \ldots$, а вместе с ними и векторы $P^{(2)}(\tau)$, $P^{(3)}(\tau), \ldots$.

Таким образом, указав алгорифм нахождения коэффициентов формальных рядов (10), мы и доказали теорему. Причем полученные нами формулы для коэффициентов рядов (10) показывают, что последние обладают производными по τ всех порядков. Вопрос о том, что полученное нами частное решение является асимптотическим разложением соответствующего точного частного решения системы (1), будет рассмотрен отдельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Д. Тамаркин, О некоторых общих задачах обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917.
2. С. Ф. Фещенко, ДАН УРСР, 11 (1949).
3. Ю. Л. Далецкий, ДАН СССР, 92, 881 (1953).
4. Ю. Л. Далецкий, С. Г. Крейн, УМЖ, 2, 71 (1950).
5. Ю. А. Митропольський, УМЖ, 3 (1953).
6. Ю. А. Митропольський, Наук. зап. Київ. у-ту, 14, вип. 2, 53 (1957).
7. М. І. Шкіль, ДАН УРСР, 123 (1958).

Поступила 17. XII 1960 г.
Киев

Asymptotic behaviour of linear systems in the case of multiple roots of a characteristic equation

N. I. Shkil

Summary

The results obtained by the author in [7] are extended. An algorithm is given for the construction of an asymptotic special solution of the system of linear differential equations (1) in the case when one of the roots of the characteristic equation possesses constant K-multiplicity, and the external frequency $i\nu(\tau)$ becomes equal to it at isolated points of the segment $0 \leqslant \tau = \varepsilon t \leqslant L$, where ε is a small real parameter.